

10

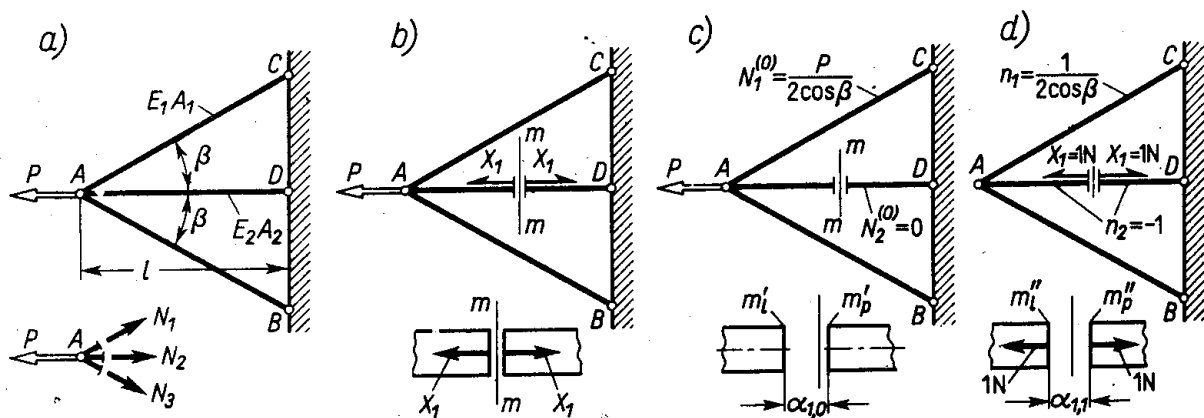
STATYCZNIE NIETYCZALNE USTROJE PRĘTOWE

Wszystkie badane dotąd ustroje były statycznie wyznaczalne. W ustrojach tych siły bierne, składające się wraz z czynnymi na obciążenie, można określić z równań statyki, a wysiłek każdego przekroju można wyznaczyć metodą przecięć. W praktyce jednak spotykamy często ustroje statycznie niewyznaczalne, w których określenie reakcji bądź wysiłku przekrojów z samych tylko równań równowagi nie jest możliwe i do ich wyznaczenia potrzeba uwzględnić odkształcenia ustroju.

10.1. Zasady i metody rozwiązania

Przebieg rozwiązania takich ustrojów prześledzimy na przykładzie płaskiej kratownicy, której węzeł A łączy się z nieodkształcalnym podłożem prętem AD i dwoma jednakowymi AB i AC (rys. 10.1a). Pręty te zakończone idealnymi przegubami mogą przenosić tylko siły wzdłużne N_1, N_2 i N_3 . Badając równowagę węzła A możemy napisać tylko dwa równania rzutów:

$$N_1 \sin \beta - N_3 \sin \beta = 0, \quad N_1 \cos \beta + N_2 + N_3 \cos \beta - P = 0, \quad (a)$$



Rys. 10.1. Wprowadzenie do metody sił

gdyż trzecie równanie (równowagi momentów) jest spełnione tożsamościowo. Zadanie jest więc statycznie niewyznaczalne, gdyż liczba niewiadomych jest większa niż liczba będących do dyspozycji równań równowagi. Nadwyżkę liczby niewiadomych nad liczbą równań

nazywamy *stopniem statycznej niewyznaczalności*. W danym przypadku różnica ta wynosi jedność i mówimy, że zadanie jest *jednokrotnie* statycznie niewyznaczalne.

Aby sformułować trzecie równanie konieczne dla określenia sił N , musimy zbadać odkształcenia ustroju. W tym celu potraktujmy jedną z nich, np. N_2 , za wchodzącą w skład obciążenia⁽¹⁾ (rys. 10.1b). Dzięki temu chwytowi *ustrój jest już statycznie wyznaczalny z nie znaną na razie co do wartości częścią obciążenia*, tj. układem sił⁽²⁾ X_1 . Siły w prętach tego ustroju określamy oddzielnie dla znanej części obciążenia, tj. siły P (rys. 10.1c), i dla nie znanej na razie części *przyjmując chwilowo*, że $X_1 = 1 \text{ N}$ (rys. 10.1d). Widać, że działanie siły P , nazywane odtąd *stanem zerowym* (stan „0”) wywołuje w prętach siły

$$N_1^{(0)} = P/2 \cos \beta, \quad N_2^{(0)} = 0, \quad N_3^{(0)} = P/2 \cos \beta, \quad (b)$$

a działanie sił $X_1 = 1 \text{ N}$, tzw. *stan pierwszy* (stan „1”)

$$n_1 = 1/2 \cos \beta \text{ N/N}, \quad n_2 = -1 \text{ N/N}, \quad n_3 = 1/2 \cos \beta \text{ N/N}. \quad (c)$$

W każdym z tych stanów siły $N^{(0)}$ bądź n wywołują odkształcenie prętów, a w konsekwencji i rozejście się końców myślowo przeciętego w przekroju $m-m$ pręta AD . Nie obliczając na razie oznaczmy, jak w art. 9.6 (wzór 9.20), te względne przemieszczenia odpowiednio przez $\alpha_{1,0}$ i $\alpha_{1,1}$. Jeśli zamiast obranych chwilowo sił $X_1 = 1 \text{ N}$ będą działać siły rzeczywiste X_1 razy większe, to przemieszczenie $\alpha_{1,1}$ powiększy się tyleż razy i będzie $\alpha_{1,1} X_1$. Całkowite względne przemieszczenie α_1 przy łącznym działaniu siły P i rzeczywistych sił X_1 i est według zasady superpozycji

$$\alpha_1 = \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0}. \quad (d)$$

Łatwo spostrzec, że $\alpha_1 = 0$, gdyż w rzeczywistości nie ma względnego przemieszczenia w miejscu myślowego przecięcia, skąd otrzymujemy równanie

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0 \quad (10.1)$$

wyrażające tzw. *warunek ciągłości odkształceń*. Aby ten wynik wykorzystać, należy tylko określić przemieszczenia $\alpha_{1,0}$ i $\alpha_{1,1}$. Czynność ta nie sprawi trudności jeśli, nawiązując do art. 9.4, zauważymy, że grupa sił $X_1 = 1 \text{ N}$ jest uogólnioną jednostkową siłą („czujnikiem”) dla przemieszczeń $\alpha_{1,0}$ i $\alpha_{1,1}$. I tak z wzoru (9.5) mamy

$$\alpha_{1,0} = \sum_1^3 \frac{N_i n_i l_i}{EA_i} = 2 \cdot \underbrace{\frac{P}{2 \cos \beta} \frac{1}{2 \cos \beta} \frac{l}{E_1 A_1 \cos \beta}}_{\text{pręty } AB \text{ i } AC} + \underbrace{\frac{0 \cdot (-1) \cdot l}{E_2 A_2}}_{\text{pręt } AD}. \quad (e)$$

Przy obliczeniu $\alpha_{1,1}$ jednostkowy układ $X_1 = 1 \text{ N}$ spełnia podwójną rolę: obciążenia i „czujnika”, wobec czego

$$\alpha_{1,1} = \sum_1^3 \frac{n_i^2 l_i}{EA_i} = \underbrace{\left(\frac{1}{2 \cos \beta} \right)^2 \frac{l}{E_1 A_1 \cos \beta}}_{\text{pręty } AB \text{ i } AC} 2 + \underbrace{\frac{(-1)^2 l}{E_2 A_2}}_{\text{pręt } AD}. \quad (f)$$

(1) Sił N_2 , jako wewnętrznych, jest dwie, z których lewa to działanie pręta mD na lewą część ustroju, a prawa to działanie całej lewej części ustroju na pręt mD .

(2) Dla przejrzystości rysunków przyjęto tu, że siły $N_2 = X_1$ są ściskające. Rzeczywisty ich zwrot mamy z wyniku końcowego.

Podstawiając wyrażenia (e) i (f) do (10.1) mamy

$$X_1 = - \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \beta (E_1 A_1 / E_2 A_2)}, \quad (g)$$

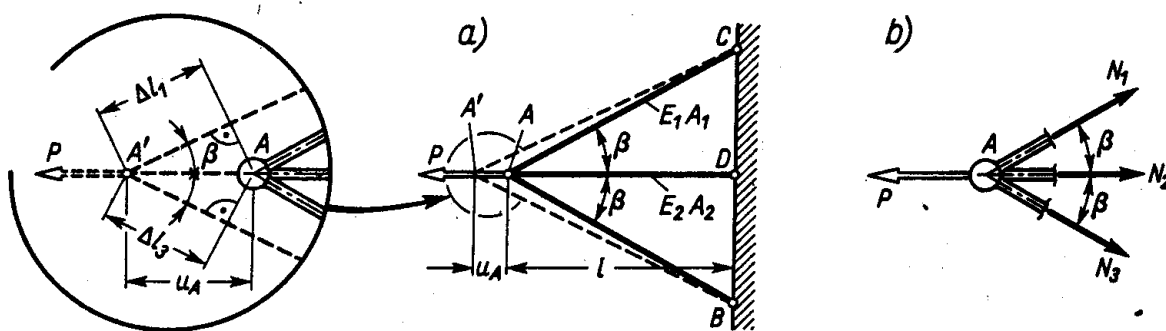
przy czym $X_1 < 0$ oznacza, że zwroty nie znanej dotąd grupy sił X_1 są przeciwne niż założono, a więc że pręt AD jest w rzeczywistości rozciągany. Jest to zgodne z fizycznym wyczuciem, gdyż w pierwotnym stanie (rys. 10.1a) węzeł A przesuwa się na lewo i pręt AD wydłuża się.

Mając wartość siły $N_2 = -X_1$ możemy z równań (a) określić pozostałe siły N_1 i N_3 . Prościej jednak jest superponować wyniki (b) i zwiększone X_1 razy wyniki (c), tj.

$$N_1 = N_1^{(0)} + n_1 X_1 = P \frac{(E_1 A_1 / E_2 A_2) \cos^2 \beta}{1 + 2 (E_1 A_1 / E_2 A_2) \cos^3 \beta} = N_3, \quad N_2 = -X_1.$$

Zbadajmy zgodność tych wyników z fizycznym obrazem zjawisk. Gdy pręt AD jest bardzo solidny w porównaniu z bocznymi, wówczas ich rola jest nieistotna i całą prawie siłę P powinien przenosić pręt AD , czyli że $N_2 \approx P$, a $N_1 = N_3 \approx 0$. Na odwrót, gdy pręt AD jest wiotki w porównaniu z bocznymi, to w prętach bocznych powinny być siły $N_1 = N_3 \approx P/2 \cos \beta$, a $N_2 \approx 0$. Taki właśnie wynik dają powyższe wzory, jeśli wstawić w nich $(E_1 A_1 / E_2 A_2) \approx 0$ dla pierwszego przypadku, a $(E_1 A_1 / E_2 A_2) = \infty$ dla drugiego. Nie rozszerzając tej dyskusji widzimy, że w badanym ustroju wysiłek przekrojów zależy nie tylko od obciążenia i kształtu, lecz także od sztywności elementów. Jest to zasadnicza cecha ustrojów statycznie niewyznaczalnych.

W przedstawionej *metodzie sił* zasadniczą niewiadomą jest siła X_1 , a warunek (10.1) ciągłości odkształceń jest końcowym etapem rozwiązania. Zamiast tego jako niewiadome można przyjąć odkształcenia ustroju, a w etapie końcowym zbadać warunki równowagi.



Rys. 10.2. Wprowadzenie do metody przemieszczeń

Ten drugi sposób rozwiązania, tzw. *metodę przemieszczeń*, zilustrujemy na tym samym ustroju. Z racji symetrii i ustroju, i obciążenia węzeł A przemieści się o u_A po osi symetrii (rys. 10.2a), przy czym pręty doznają wydłużeń

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = u_A \cos \beta, \quad \Delta l_2 = u_A. \quad (h)$$

Tym wydłużeniom odpowiadają siły wzdłużne w prętach

$$N_1 = N_3 = E_1 A_1 \Delta l_1 / l_1 = E_1 A_1 u_A \cos^2 \beta / l, \quad N_2 = E_2 A_2 u_A / l. \quad (i)$$

zapewniające równowagę węzła A (rys. 10.2b), czyli

$$2N_1 \cos \beta + N_2 - P = 0.$$

Wstawiając wyrażenia (i) w powyższe równanie mamy

$$u_A = Pl / (2E_1 A_1 \cos^3 \beta + E_2 A_2), \quad (j)$$

a po wstawieniu u_A do równań (i) określamy wartości N_1, N_2 , które, jak łatwo sprawdzić, są identyczne z poprzednimi.

W bardziej złożonych ustrojach metodą przemieszczeń jest wygodniejsza niż metoda sił, gdyż daje prostsze równania. Jednocześnie jest ona trudniejsza, gdyż wymaga określenia obrazu odkształceń. Z tego powodu będziemy częściej stosować metodę sił. Jak widzieliśmy na przykładzie (rys. 10.1), metoda ta ma następujące etapy:

I. *Określenie stopnia statycznej niewyznaczalności* ustroju. Etap ten wyrażał się w sformułowaniu równań równowagi (a) i stwierdzeniu, o ile więcej jest niewiadomych sił niż tych równań.

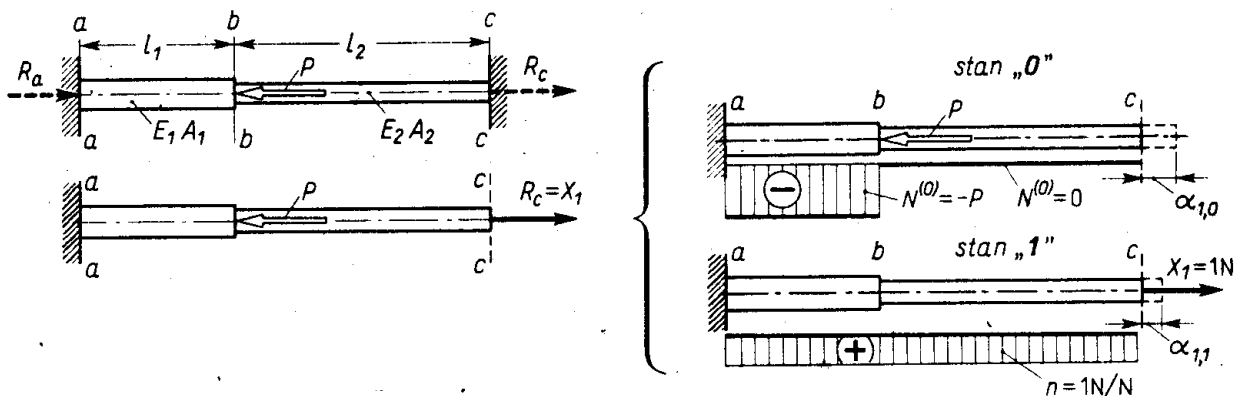
II. *Zamiany ustroju statycznie niewyznaczalnego na statycznie wyznaczalny z nie znanymi na razie co do wartości niektórymi obciążeniami o znanym jednak charakterze i miejscu działania.* Etapem tym było uznanie za niewiadomą siły wzdłużnej X_1 (znany charakter) w przekroju $m-m$ (znane miejsce działania). Wbrew pozorom etap ten nie jest żonglerką słowną, lecz jest zmianą pojęciową, sprowadza bowiem ustrój do klasy znanych już ustrojów.

III. *Określenie nie znanych wartości sił X , tzw. statycznie niewyznaczalnych, z warunku ciągłości przemieszczeń w tym miejscu ustroju, w którym te siły X wprowadzono.* Etapem tym było sformułowanie równania (10.1) i obliczenie wartości jego współczynników $\alpha_{1,1}$ i $\alpha_{1,0}$.

Konsekwentne przestrzeganie tych etapów powinno być regułą postępowania, daje bowiem rękojmię prawidłowego wyniku. Osobną kwestią jest dyskusja wyników rozwiązania i ich wykorzystanie do oceny bezpieczeństwa bądź do kształtowania ustroju.

Zadania

1. Metodą sił wyznaczyć siły wzdłużne w pręcie obustronnie utwierdzonym i obciążonym poosiową siłą P (rys. 10.3).



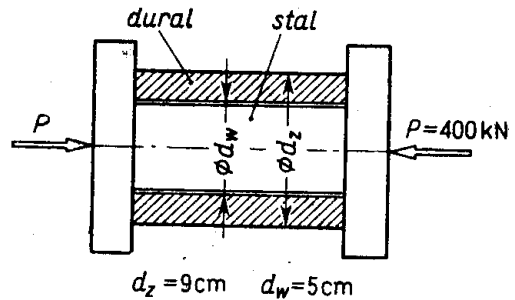
Rys. 10.3.

Odp. Wartość $R_C = X_1$ otrzymujemy z równania (10.1), w którym $\alpha_{1,0} = -Pl_1/E_1A_1$, $\alpha_{1,1} = (l_1/E_1A_1) + (l_2/E_2A_2)$. W wyniku:

na odcinku bc $N_{bc} = X_1 = P/[1 + (E_1A_1/E_2A_2)(l_2/l_1)]$,

na odcinku ab $N_{ab} = X_1 - P = -P/[(E_2A_2/E_1A_1)(l_1/l_2) + 1]$.

2. Stalowy walec i współosiowa z nim duralowa tuleja ściskane są siłą P między nieodkształcalnymi płytami prasy (rys. 10.4). Metodą przemieszczeń określić względne skrócenie ε oraz naprężenia w tulei i walcu. $E_s = 2,05 \cdot 10^5$ MPa, $E_d = 7,0 \cdot 10^4$ MPa.



Rys. 10.4.

Odp. Ponieważ $\varepsilon_s = \varepsilon_d = \varepsilon$, zatem $N_{stal} = E_s \varepsilon (\pi d_w^2/4)$, $N_{dural} = E_d \varepsilon \pi (d_z^2 - d_w^2)/4$, a równanie równowagi płyty $N_{stal} + N_{dural} - P = 0$, skąd $\varepsilon = P/[(EA)_s + (EA)_d] = 0,563 \cdot 10^{-3}$ i dalej $\sigma_s = E_s \varepsilon = 115$ MPa, $\sigma_d = E_d \varepsilon \approx 39$ MPa.

3. W konstrukcji (rys. 10.1), $E_1 = E_2$, $\beta = 30^\circ$. Znaleźć stosunek A_2/A_1 , aby były równe: a) siły wzdłużne, b) naprężenia.

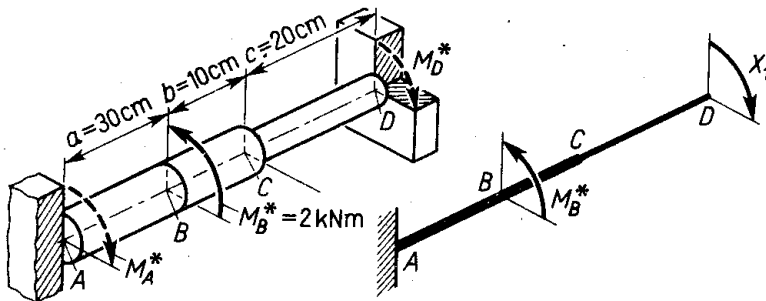
Odp. a) $A_2/A_1 = 0,75$; b) zadanie nie ma rozwiązania, gdyż z (h) mamy: $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \Delta l_1/l_1 = u_A \cos^2 \beta / l$, $\Delta l_2 = u_A / l$ i gdy $\beta \neq 0$, zawsze $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, a więc i $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

4. Obliczyć naprężenia τ_{max} w wałku (rys. 10.5) utwierdzonym na końcach, a obciążonym momentem M_B^* . Średnice na odcinkach AC i CD są $d_{AC} = 5$ cm i $d_{CD} = 4$ cm.

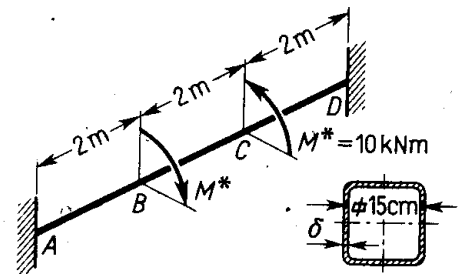
Odp. Po myślowym rozcięciu utwierdzenia D i oznaczeniu $M_D^* = X_1$ mamy znowu warunek ciągłości (10.1), w którym

$$\alpha_{1,1} = [32(a+b)/\pi G d_{AC}^4] + (32c/\pi G d_{CD}^4), \quad \alpha_{1,0} = -32M_B^* a / \pi G d_{AC}^4$$

kąty obrotu przekroju D wywołane przez $X_1 = 1$ Nm, lub przez M_B^* . W wyniku $X_1 = 675$ Nm i niebezpieczne są przekroje odcinka AB , gdzie $M_s = M_B^* - X_1 = 1325$ Nm, zaś $\tau_{max} = 54,1$ MPa.



Rys. 10.5.



Rys. 10.6.

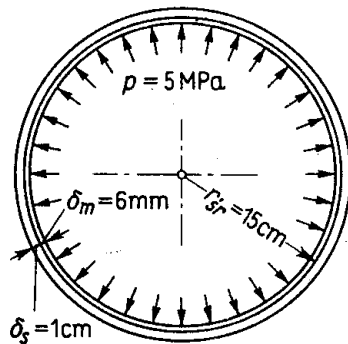
5. Utwierdzoną na końcach pryzmatyczną cienkościenną rurę obciążono dwoma przeciwnymi momentami M^* (rys. 10.6). Dobrać grubość δ ścianki, aby $\sigma_{red} \leq 85$ MPa.

Odp. $(M_s)_{max} = 0,667 M^* = 6,67$ kNm działa w części BC i z warunku $\tau = (M_s)_{max} / 2F\delta \leq \sigma_{red} / \sqrt{3}$ mamy $\delta \approx 3$ mm.

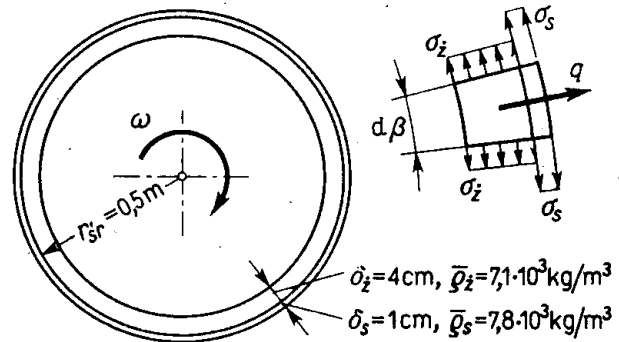
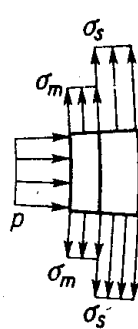
6. Dwie rury: wewnętrzna miedziana ($E_m = 1 \cdot 10^5$ MPa) i zewnętrzna stalowa ($E_s = 2,0 \cdot 10^5$ MPa) o tej samej długości włożono na siebie bez luzu (rys. 10.7). Pomijając tarcie między rurami określ metodą przemieszczeń naprężenia w rurach wywołane działaniem ciśnienia $p = 5$ MPa.

Od p. W obydwóch rurach wydłużenie obwodowe ε jest to samo, skąd $\sigma_s = E_s \varepsilon$ i $\sigma_m = E_m \varepsilon$. Warunek równowagi paska o jednostkowej długości $\sigma_s \delta_s + \sigma_m \delta_m = pr_{sr}$, skąd

$$\varepsilon = pr_{sr} / (E_s \delta_s + E_m \delta_m) = 2,88 \cdot 10^{-4} \quad \text{oraz} \quad \sigma_s \approx 58 \text{ MPa}, \quad \sigma_m \approx 29 \text{ MPa}.$$



Rys. 10.7.



Rys. 10.8.

7. Cienki pierścień żeliwny ($E_z = 7 \cdot 10^4$ MPa) z nałożonym na niego bez luzu bandażem stalowym ($E_s = 2,0 \cdot 10^5$ MPa) o tej samej szerokości wiruje z $\bar{n} = 1500$ obr/min (rys. 10.8). Określić naprężenia σ_z w pierścieniu i σ_s w bandażu.

Od p. Rolę p z zadania poprzedniego spełnia teraz siła bezwładności $q = (\bar{\rho}_z \delta_z + \bar{\rho}_s \delta_s) (\pi \bar{n} / 30)^2 r_{sr}$. Reszta jak poprzednio i $\sigma_z = 32,5$ MPa, $\sigma_s = 93,0$ MPa.

10.2. Równania kanoniczne metody sił

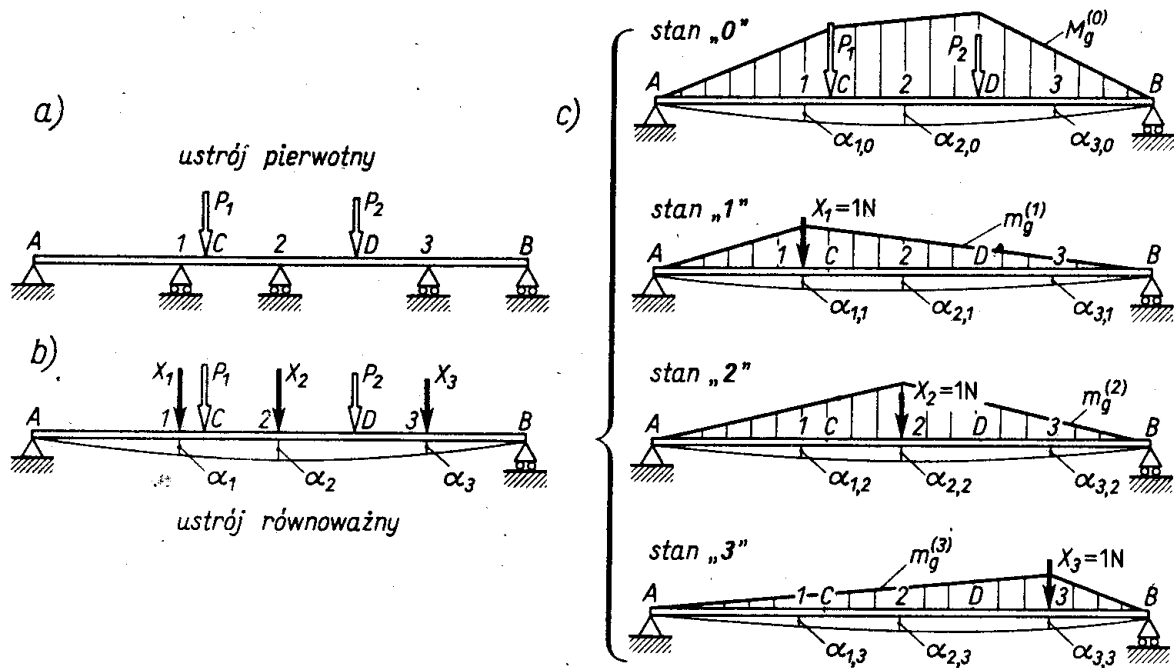
Metodę sił uogólnimy obecnie na przypadek, gdy badany sprężysty i liniowy ustrój jest wielokrotnie statycznie niewyznaczalny. Metodę objaśnimy na przykładzie tzw. *belki ciągłej* (rys. 10.9a), w której podpory pośrednie 1, 2 i 3 dzielą całą belkę na tzw. *przęsła*. Jeśli te podpory myślowo usunąć zostawiając tylko podpory skrajne A i B, to dla zachowania pierwotnego stanu ustroju musimy poza znanymi siłami P_1 i P_2 przyłożyć nie znane na razie siły X_1 , X_2 i X_3 stanowiące reakcje usuniętych podpór na belkę (rys. 10.9b). Wyznaczenie tych sił X z równań równowagi nie jest możliwe, albowiem łącznie z reakcjami podpór A i B mamy sześć niewiadomych, a tylko trzy równania równowagi. Tak więc badany ustrój jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalny, a nie znane siły X_1 , X_2 i X_3 *statycznie niewyznaczalne*. Początkowy stan ustroju, tj. belkę na pięciu podporach, nazywamy *ustrojem pierwotnym*. Tę samą belkę po usunięciu podpór pośrednich, a więc statycznie wyznaczalną, nazywamy *ustrojem podstawowym*. Ustrój podstawowy obciążony siłami (P_1 , P_2) i statycznie niewyznaczalnymi (X) nazywamy *ustrojem równoważnym*.

Oznaczenie wielkości statycznie niewyznaczalnych oraz określenie ustroju podstawowego i równoważnego zamyka I i II etap rozwiązania (art. 10.1). Aby określić wartości sił X (III etap rozwiązania), rozpatrzmy przemieszczenia (ugięcia) ustroju równoważnego, a w szczególności ugięcia α_1 , α_2 , α_3 w punktach 1, 2, 3, w których działają siły X . Ugięcia te są funkcjami znanych obciążeń (P_1 , P_2) i nie znanych sił X i jeśli badany ustrój ma

być rzeczywiście równowazny pierwotnemu, to te przemieszczenia muszą być równe zero, czyli

$$\alpha_1(P_1, P_2, X_1, X_2, X_3) = 0, \quad \alpha_2(P_1, \dots, X_3) = 0, \quad \alpha_3(P_1, \dots, X_3) = 0. \quad (a)$$

Warunki (a) wyrażają w swej istocie *ciągłość przemieszczeń* między belką a pośrednimi podporami. Aby w tych zależnościach ujawnić rolę poszczególnych obciążeń, rozdzielamy stan równowazny na cztery stany składowe (rys. 10.9c). Stan obciążenia znanymi siłami



Rys. 10.9. Ilustracja do sformułowania równań kanonicznych

(P_1, P_2) nazywamy zerowym (stan „0”), a kolejne stany obciążenia siłami *jednostkowymi* $X_1 = 1 \text{ N}$, $X_2 = 1 \text{ N}$, $X_3 = 1 \text{ N}$ odpowiednio stanami; „1”, „2” i „3”. Odpowiednie przemieszczenia oznaczamy przez $\alpha_{i,j}$ zachowując symbolikę wskaźników, jak w art. 9.6. Tak na przykład $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{1,0}$ są uogólnionymi przesunięciami (ugięciami) odpowiednio dla sił X_1, X_2, X_1 , a wywołanymi jednostkowymi obciążeniami $X_3 = 1 \text{ N}$, $X_2 = 1 \text{ N}$ i stanem obciążenia „0”.

Przypominając teraz, że w stanie równowaznym zamiast sił jednostkowych X działają ich wielokrotności oznaczone jako $X_1 \neq 1 \text{ N}$, $X_2 \neq 1 \text{ N}$, $X_3 \neq 1 \text{ N}$ otrzymamy w punkcie 1 przemieszczenia $\alpha_{1,1} X_1$, $\alpha_{1,2} X_2$, $\alpha_{1,3} X_3$, $\alpha_{1,0}$ zachodzące w tym samym kierunku. Przy jednoczesnym działaniu wszystkich obciążeń całkowite przemieszczenie α_1 jest sumą tych składników i zgodnie z pierwszym warunkiem ciągłości (a) musi być równe zero, czyli

$$\alpha_1 = \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,3} X_3 + \alpha_{1,0} = 0.$$

Podobnie formułujemy warunki ciągłości przemieszczeń i w rezultacie otrzymujemy układ trzech równań

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,3} X_3 + \alpha_{1,0} &= 0, \\ \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,3} X_3 + \alpha_{2,0} &= 0, \\ \alpha_{3,1} X_1 + \alpha_{3,2} X_2 + \alpha_{3,3} X_3 + \alpha_{3,0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Powyższe równania liniowe nazywamy *równaniami kanonicznymi* metody sił lub *równaniami Maxwella–Mohra*. Ich liczba jest taka, jak stopień statycznej niewyznaczalności ustroju, wystarcza więc do jednoznacznego⁽¹⁾ określenia nie znanych dotąd wartości X i stanowi formalne rozwiązanie zadania. Jest rzeczą oczywistą, że wybrany tu przykład ustroju nie wpływa zupełnie na ogólność rozważań. Podobną postać równań kanonicznych otrzymamy dla każdego ustroju, z tym tylko, że liczba równań może być inna, zależnie od stopnia statycznej niewyznaczalności.

Tak zwane *przemieszczenia jednostkowe* $\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots$ obliczamy metodą Maxwella–Mohra. Ponieważ $\alpha_{i,j}$ jest uogólnionym przesunięciem dla uogólnionej siły X_i wywołanym przez jednostkowe uogólnione obciążenie $X_j = 1$, zatem dla badanej tu konstrukcji płaskiej mamy z wzoru (9.2)

$$\alpha_{i,j} = \int \frac{m_g^{(j)} m_g^{(i)} ds}{EJ_y} + \int \frac{n^{(j)} n^{(i)} ds}{EA} + \psi \int \frac{t^{(j)} t^{(i)} ds}{GA}, \quad (10.3)$$

gdzie $m_g^{(j)}, n^{(j)}, t^{(j)}$ oznaczają odpowiednio moment gnący, siłę wzdłużną i siłę tnącą wywołaną obciążeniem $X_j = 1$, a więc w stanie „ j ”. Podobne oznaczenia ze wskaźnikiem (i) odpowiadają $X_i = 1$, a więc stanowi „ i ”, spełniającemu rolę „czujnika”. Dla współczynników $\alpha_{i,i}$ uogólniona siła $X_i = 1$ występuje w podwójnej roli: „czujnika” i obciążenia, co powoduje, że we wzorze (10.3) mamy zamiast iloczynów $m_g^{(j)} m_g^{(i)}, \dots$ kwadraty $[m_g^{(i)}]^2, \dots$. Wynika stąd, że $\alpha_{i,i}$ jest zawsze dodatnie, natomiast $\alpha_{i,j}$ ($i \neq j$) mogą być dodatnie, ujemne lub równe zero. Z budowy wzoru (10.3) widać, że

$$\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}, \quad (10.4)$$

co jest zresztą konsekwencją ogólnej zasady wzajemności (9.20). Wykorzystanie zależności (10.4) ułatwia obliczenia, gdyż redukuje liczbę określanych wyrazów.

Wyrazy wolne $\alpha_{i,0}$ układu (10.2) określamy z tego samego wzoru (9.2) dla obciążenia w stanie „ 0 ”, czyli

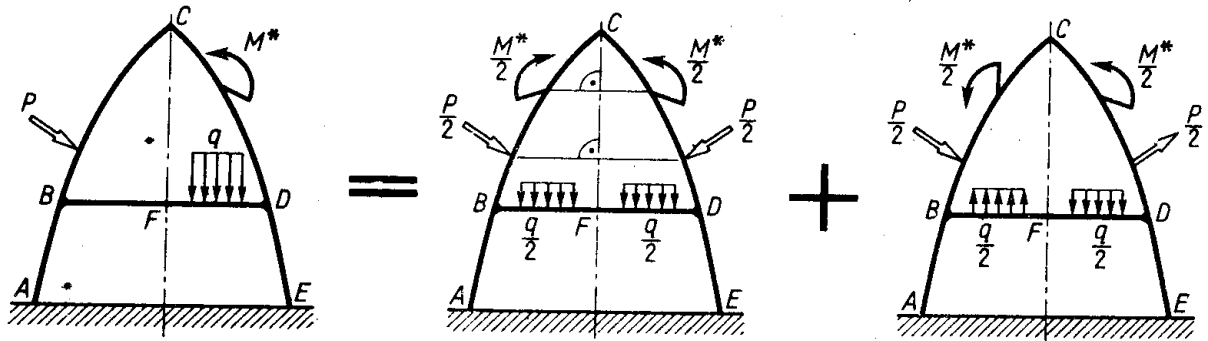
$$\alpha_{i,0} = \int \frac{M_g^{(0)} m_g^{(i)} ds}{EJ_y} + \int \frac{N^{(0)} n^{(i)} ds}{EA} + \psi \int \frac{T^{(0)} t^{(i)} ds}{GA}, \quad (10.5)$$

gdzie $M_g^{(0)}, N^{(0)}, T^{(0)}$ składowe wysiłku w stanie „ 0 ”. Przy obliczeniu całek we wzorach (10.3) i (10.5) można korzystać, o ile spełnione są odpowiednie warunki, ze skróconego sposobu całkowania według (9.3). Podobnie wykorzystując wnioski z rozdz. 9, można często pominąć wpływ sił wzdłużnych i tnących zachowując w (10.3) i (10.5) tylko pierwszy składnik. Tak właśnie zrobiono na rys. 10.9c podając tylko $M_g^{(0)}, \dots$, co nie oznacza, że siły $N^{(0)}, T^{(0)}, n^{(i)}, t^{(i)}$ są równe zero.

Gdy badany ustrój ma oś lub płaszczyznę symetrii, wówczas duże uproszczenie daje wykorzystanie *zasady jednoznaczności* głoszącej, że w danym sprężystym i liniowym ustroju dane obciążenie wywołuje tylko jeden stan napięć i przemieszczeń.⁽²⁾ Zauważmy bowiem, że ustrój taki (rys. 10.10) stanowi zespół dwóch identycznych konstrukcji (połówek)

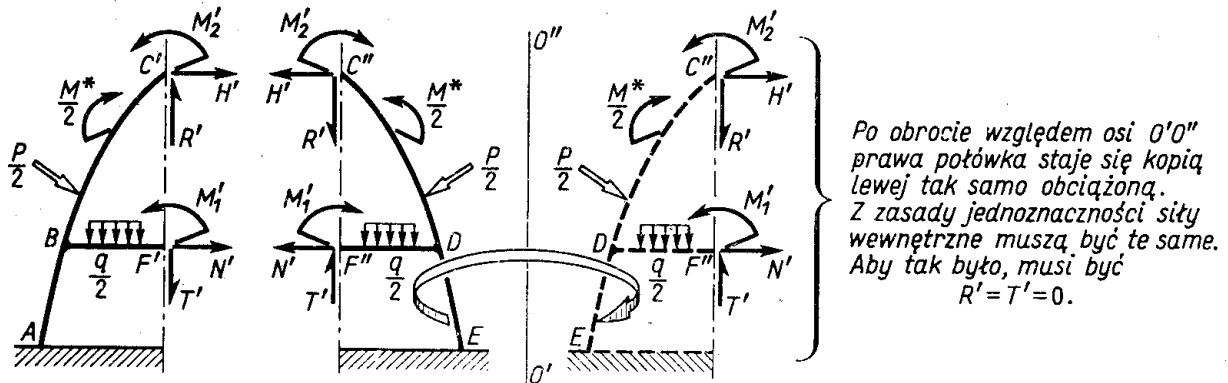
⁽¹⁾ Można udowodnić, że wyznacznik charakterystyczny układu (10.2) jest zawsze różny od zera, co jak wiemy z matematyki, wystarcza dla jednoznaczności rozwiązania.

⁽²⁾ Zakłada się, że ustrój nie może przemieszczać się jako ciało sztywne. Dowód zasady jednoznaczności podaje się w teorii sprężystości.

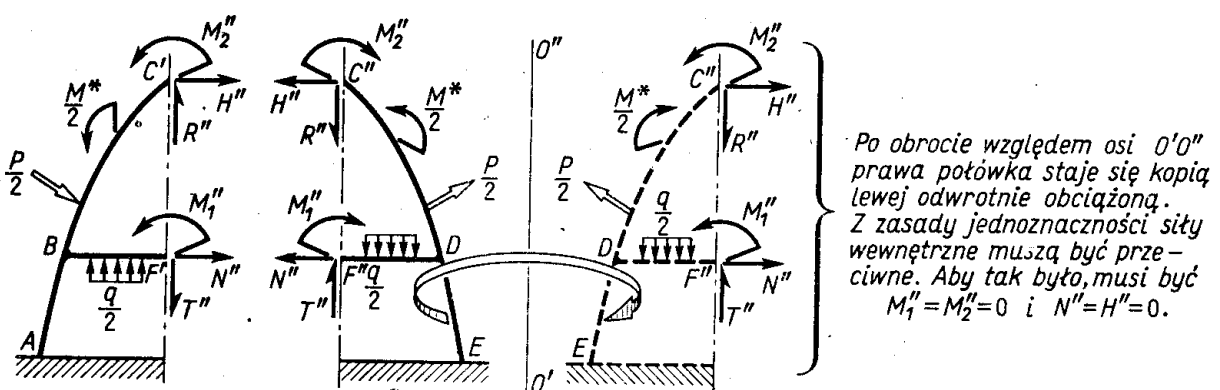


Rys. 10.10. Rozkład obciążenia na symetryczne i antysymetryczne

złączonych w płaszczyźnie symetrii, a każde jego obciążenie da się rozdzielić na symetryczne i antysymetryczne. Rozważając działanie każdego z nich osobno (rys. 10.11 i 10.12) przeprowadźmy dodatkowo przecięcie ustroju w płaszczyźnie symetrii, dzięki czemu ujawniają



Rys. 10.11. Oddziaływania w płaszczyźnie symetrii przy obciążeniu symetrycznym



Rys. 10.12. Oddziaływania w płaszczyźnie symetrii przy obciążeniu antysymetrycznym

się odpowiednio układy wewnętrzne R', H', M_2, T', N', M_1 bądź R'', \dots, M_1 podane tu w najogólniejszej postaci płaskiego układu sił. Traktując teraz każdą z połówek jako odrębny ustrój wykorzystamy zasadę jednoznaczności. W tym celu obrócmy względem osi $O'O'' \parallel C'F'$ prawe połówki wraz z ich obciążeniem tak, aby pokryły się one z lewymi.

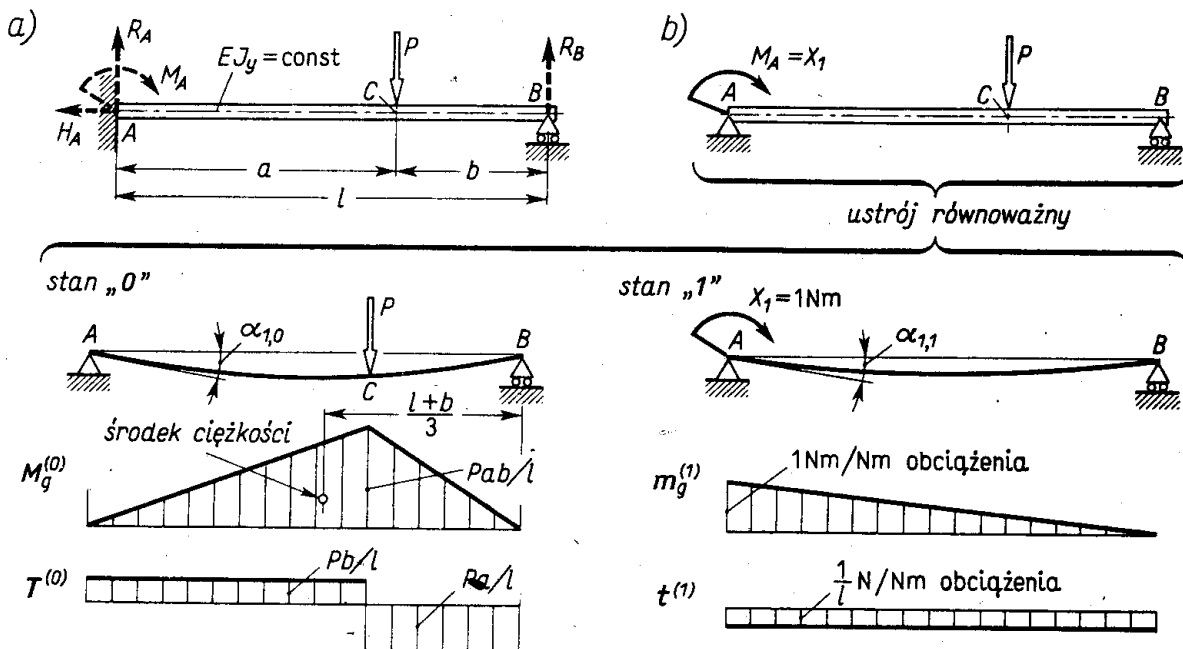
Dla obciążeń symetrycznych operacja ta daje dwa identyczne ustroje, identycznie obciążone, wobec czego w przekrojach C' i C'' oraz F' i F'' muszą być te same siły wewnętrzne. Widać, że ten warunek jednoznaczności spełniają M'_1, M'_2, N', H' , natomiast siły T' i R' istnieć nie mogą, gdyż przeczyłoby to wspomnianej zasadzie. Dla obciążeń antysymetrycznych (rys. 10.12) mamy po obrocie identyczne ustroje *odwrotnie* obciążone, wobec czego siły wewnętrzne dla lewej połówki i obróconej prawej powinny być przeciwne. Ten warunek jednoznaczności spełniają tylko siły T'' i R'' , a M''_1, M''_2, H'' i N'' istnieć nie mogą. Wszystkie te rozważania dają się ująć w jedną regułę, a mianowicie:

w przecięciu na osi symetrii ustroju przy obciążeniu symetrycznym istnieją tylko oddziaływania symetryczne względem tej osi, a przy antysymetrycznym tylko antysymetryczne. Użyte tu słowo „oddziaływanie” wskazuje, jak podano na rysunkach, że wielkości te muszą być zgodne z III prawem Newtona.

10.3. Przykłady belek statycznie niewyznaczalnych

Zastosowanie metody sił i ogólnych reguł z art. 10.1 i 10.2 prześledzimy naprzód na prostych przypadkach belek.

Pryzmatyczna belka utwierdzona na jednym, a podparta przegubowo na drugim końcu (rys. 10.13a). Zadanie to jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne, gdyż mamy tu



Rys. 10.13. Pierwszy podstawowy przypadek belki jednoprzęsłowej

4 reakcje R_A, H_A, M_A i R_B , a tylko trzy równania równowagi. Jako wielkość statycznie niewyznaczalną obieramy $M_A = X_1$, wobec czego ustrojem podstawowym (statycznie wyznaczalnym) staje się belka na przegubowych podporach A i B, a ustrój równoważny

ma postać według rys. 10.13b. Wyjaśnienia te zamykają *I* i *II* etap rozwiązania, o których mówiono w art. 10.1.

Wartość X_1 określamy z równania (10.1)

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0, \quad (a)$$

w którym $\alpha_{1,0}$ oraz $\alpha_{1,1} X_1$ są kątami obrotu przekroju A wywołanymi odpowiednio przez siłę P i moment $X_1 \neq 1$ Nm, a całe równanie wyraża warunek ciągłości przemieszczeń w przekroju A . Wykorzystując podane wykresy $M_g^{(0)}$ i $m_g^{(1)}$ i pomijając wpływ sił tnących mamy z wzorów (10.3) i (10.5)

$$\alpha_{1,1} = \int_0^l \frac{[m_g^{(1)}]^2 dx}{EJ_y} = \frac{1}{EJ_y} \underbrace{\left(\frac{1 \cdot l}{2}\right)}_{\text{pole } m_g^{(1)}} \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{rzędna } m_g^{(1)}} = \frac{l}{3EJ_y} \left(\frac{\text{rad}}{\text{Nm}}\right), \quad (b)$$

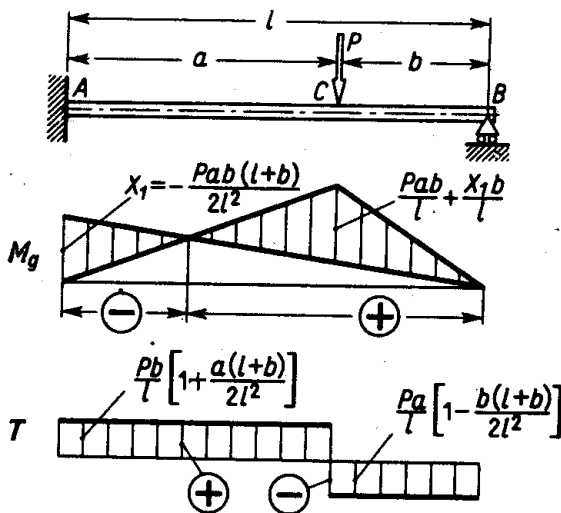
$$\alpha_{1,0} = \int_0^l \frac{M_g^{(0)} m_g^{(1)} dx}{EJ_y} = \frac{1}{EJ_y} \underbrace{\left(\frac{Pab}{l} \frac{l}{2}\right)}_{\text{pole } M_g^{(0)}} \underbrace{\left(\frac{l+b}{3l}\right)}_{\text{rzędna } m_g^{(1)}} = \frac{Pab(l+b)}{6lEJ_y} \text{ (rad)}, \quad (c)$$

przy czym do całkowania wykorzystano wzór (9.3). Wstawiając wyniki (b) i (c) do (a) mamy

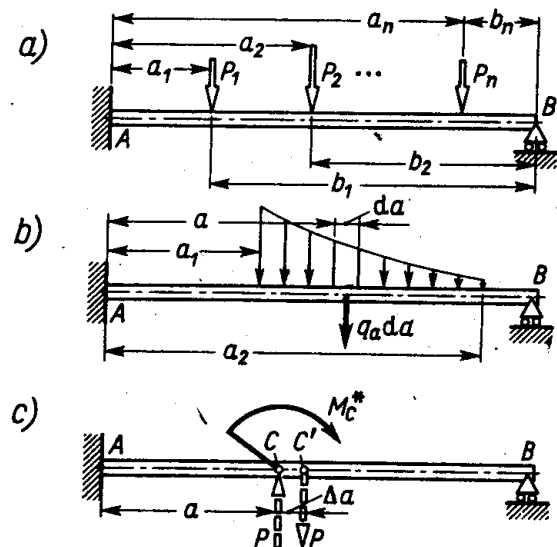
$$X_1 = -\frac{Pab(l+b)}{2l^2} \text{ (Nm)}, \quad (10.6)$$

przy czym $X_1 < 0$ oznacza, iż rzeczywisty zwrot $M_A = X_1$ jest przeciwny niż na rys. 10.14. Wypadkowy wykres M_g (rys. 10.14) otrzymujemy superponując wykres $M_g^{(0)}$ i zwiększony X_1 razy wykres $m_g^{(1)}$, czyli $m_g^{(1)} X_1$, którego rzędne są tu odwrócone (rys. 5.19). W postaci analitycznej

$$M_g = M_g^{(0)} + m_g^{(1)} X_1. \quad (d)$$



Rys. 10.14. Wynik rozwiązania belki z rys. 10.13



Rys. 10.15. Uogólnienie wyniku podstawowego na obciążenia złożone

Podobnie określamy rzędne wykresu siły tnącej T

$$T = T^{(0)} + t^{(1)} X_1. \quad (e)$$

Gdy na belkę działa szereg sił P_1, \dots, P_n (rys. 10.15a), wówczas, zgodnie z zasadą superpozycji, wypadkowy moment $M_A = X_1$ jest algebraiczną sumą wyrażeń (10.6) obliczonych dla każdej siły oddzielnie, czyli

$$X_1 = -(1/2l^2) \sum_1^n P_i a_i b_i (l + b_i). \quad (f)$$

Podobnie przy obciążeniu ciągłym (rys. 10.15b) wybranej elementarnej sile $q_a da$ odpowiada elementarny moment

$$dX_1 = -(q_a da) ab(l+b)/2l^2 = -q_a a(l-a)(2l-a) da/2l^2,$$

a całkowity moment $M_A = X_1$ jest znowu ich sumą, czyli

$$X_1 = - \int_{a_1}^{a_2} \frac{q_a a(l-a)(2l-a) da}{2l^2}, \quad (g)$$

przy czym a jest tu zmienną niezależną, od której zależy również samo obciążenie ciągłe q_a .

Aby wykorzystać wzór (10.6) przy obciążeniu belki momentem M_C^* (rys. 10.15c), zastępujemy go parą sił P o bardzo małym ramieniu $\Delta a = M_C^*/P$. Lewej, skierowanej do góry, sile P odpowiada moment $-X_1$, natomiast sile prawej przesuniętej o Δa odpowiada moment X_1'

$$X_1' = X_1 + (dX_1/da) \Delta a = X_1 - [P(2l^2 - 6la + 3a^2) \Delta a/2l^2].$$

Przy łącznym działaniu pary sił wypadkowy moment $(X_1)_M = X_1' - X_1$, a ponieważ $P \Delta a = M_C^*$, zatem ostatecznie

$$(X_1)_M = \frac{dX_1}{da} = - \frac{M_C^*(2l^2 - 6la + 3a^2)}{2l^2}. \quad (h)$$

Tak więc działanie każdego złożonego obciążenia sprowadza się do superpozycji podstawowego przypadku z rys. 10.13.

Pryzmatyczna belka utwierdzona na końcach (rys. 10.16a). Ponieważ koniec B ma swobodę przesunięć wzdłużnych, zadanie jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalne (pięć niewiadomych reakcji R_A, R_B, H_A, M_A i M_B a tylko trzy równania równowagi). Obierając za ustrój podstawowy belkę na przegubowych podporach A i B , desygnujemy tym momenty $M_A = X_1$ i $M_B = X_2$ jako statycznie niewyznaczalne, a ustrój (rys. 10.16b) jako równoważny.

Niewiadome X_1 i X_2 określamy z kanonicznego układu równań (10.2), który ma obecnie postać

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,0} &= 0, \\ \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

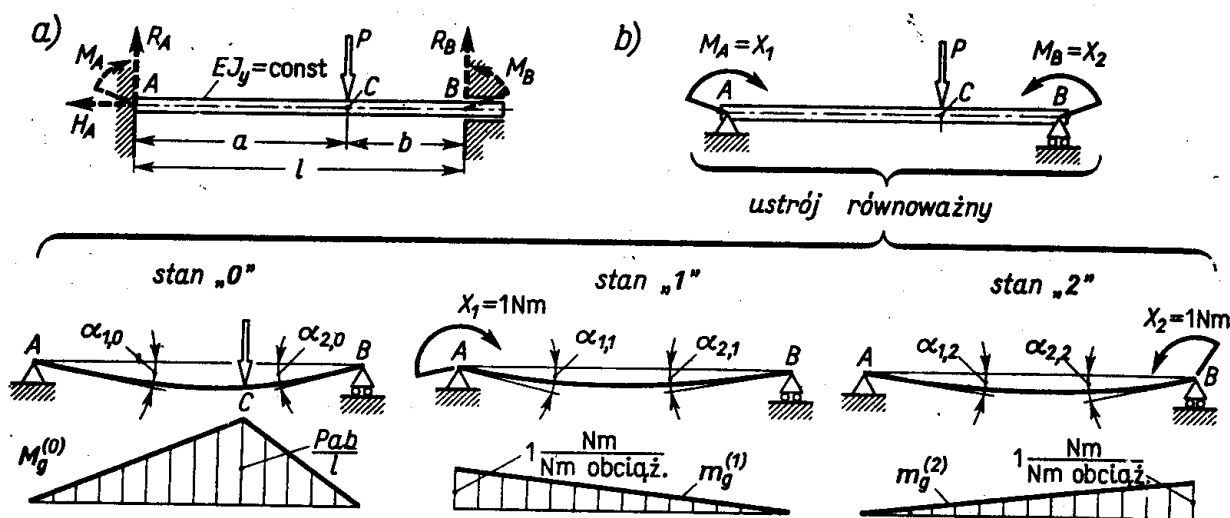
i wyraża ciągłość przemieszczeń w przekrojach A i B , a mianowicie, że całkowite kąty

ugięcia są w tych punktach równe zero. Wykorzystując wzory (10.3) i (10.5) mamy tym razem

$$\alpha_{1,1} = \int_0^l \frac{[m_g^{(1)}]^2 dx}{EJ_y} = \frac{l}{3EJ_y}, \quad \alpha_{1,2} = \int_0^l \frac{m_g^{(1)} m_g^{(2)} dx}{EJ_y} = \frac{l}{6EJ_y},$$

$$\alpha_{2,2} = \int_0^l \frac{[m_g^{(2)}]^2 dx}{EJ_y} = \frac{l}{3EJ_y}, \quad \alpha_{1,0} = \int_0^l \frac{M_g^{(0)} m_g^{(1)} dx}{EJ_y} = \frac{Pab(l+b)}{6lEJ_y},$$

$$\alpha_{2,0} = \int_0^l \frac{M_g^{(0)} m_g^{(2)} dx}{EJ_y} = \frac{Pab(l+a)}{6lEJ_y},$$



Rys. 10.16. Drugi przypadek podstawowy belki jednoprzęsłowej

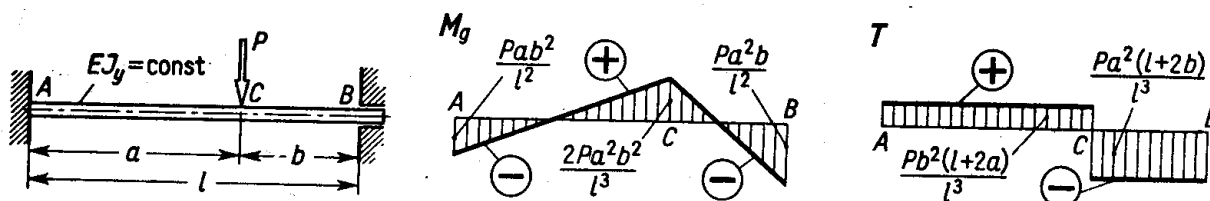
przy czym pominięto znowu wpływ sił tnących. Wstawiając powyższe wyrażenia do równań (i) mamy po uproszczeniach

$$2X_1 + X_2 + [Pab(l+b)/l^2] = 0,$$

$$X_1 + 2X_2 + [Pab(l+a)/l^2] = 0,$$

a po ich rozwiązaniu wartości X_1 i X_2 :

$$X_1 = -\frac{Pab^2}{l^2}, \quad X_2 = -\frac{Pa^2b}{l^2}. \quad (10.7)$$



Rys. 10.17. Wynik rozwiązania belki z rys. 10.16

Ujemne wartości X_1 i X_2 oznaczają, iż rzeczywiste zwroty momentów $M_A = X_1$ i $M_B = X_2$ są przeciwne niż na rys. 10.16b. Wypadkowe wykresy M_g i T (rys. 10.17) obliczone z superpozycji jak w zadaniu poprzednim mają rządne

$$M_g = M_g^{(0)} + m_g^{(1)} X_1 + m_g^{(2)} X_2, \quad T = T^{(0)} + t^{(1)} X_1 + t^{(2)} X_2, \quad (j)$$

gdzie $T^{(0)}$, $t^{(1)}$, $t^{(2)}$ nie pokazane na rys. 10.16 rządne wykresów sił tnących w stanie „0”, „1” i „2”. Tak jak poprzednio, wzory (10.7) oraz (j) można uogólnić na przypadki obciążenia złożonego i otrzymać wyniki podobne do wzorów (f)÷(h).

Zadania

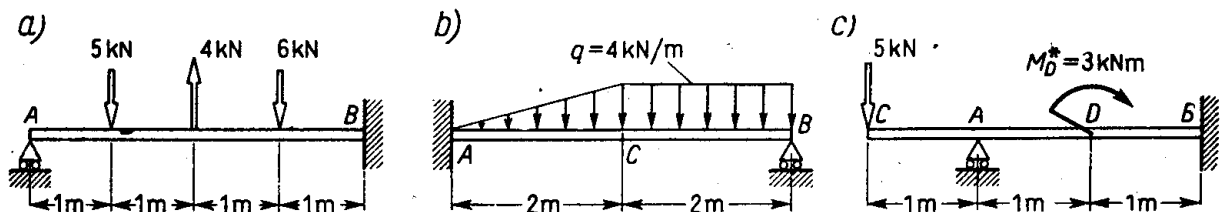
1. Znaleźć niebezpieczny przekrój w belce (rys. 10.14).

Odp. Gdy $b > l(\sqrt{2}-1)$, niebezpieczny jest przekrój A , bo $|M_A| > |M_C|$; gdy $b < l(\sqrt{2}-1)$, niebezpieczny jest przekrój C .

2. Znaleźć ekstremum momentu $M_A = X_1$ w belce (rys. 10.14), gdy siła P przesuwa się od punktu A do punktu B .

Odp. $(X_1)_{\text{ekstr}} = -Pl/3\sqrt{3} \approx -0,192Pl$, gdy $b = l/\sqrt{3}$.

3. Dla belek (rys. 10.18) wyznaczyć moment w utwierdzeniu.



Rys. 10.18.

Odp. a) z wzoru (f) $X_1 = M_B = -3,28 \text{ kNm}$; b) gdy $a(0; l/2)$, wówczas, $q_a = 2qa/l$, gdy $a(l/2; l)$, wówczas $q_a = q = \text{const}$ i z wzoru (g) mamy $X_1 = M_A = -187ql^2/1920 \approx -6,23 \text{ kNm}$; c) belkę AB obciążają: moment M_D^* i zastępujący siłę 5 kN moment $M_A^* = 5 \text{ kNm}$; w stosunku do rys. 10.15c mamy tu $M_A^* > 0$ i $M_D^* < 0$; z wzoru (h) $M_B = X_1 = 2,13 \text{ kNm} > 0$, co odpowiada ścisaniu górnych włókien belki.

4. Rozwiązać belkę (rys. 10.13a) przyjmując za statycznie niewyznaczalną reakcję $R_B = X_1$ (rys. 10.19).

Rozwiązanie. Po rozdzieleniu ustroju równowaznego na stan „0” i „1” formułujemy warunek ciągłości przemieszczeń

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0$$

wyrażający brak szpary między końcem B belki a podporą. Ugięcia $\alpha_{1,1}$ i $\alpha_{1,0}$ obliczone z wzorów (10.3) i (10.5) są

$$\alpha_{1,1} = \frac{l \cdot l}{2} \frac{2l}{3} \frac{1}{EJ_y} = \frac{l^3}{3EJ_y} \left(\frac{\text{m}}{\text{N}} \right), \quad \alpha_{1,0} = -\frac{Pa \cdot a}{2} \left(l - \frac{a}{3} \right) \frac{1}{EJ_y} \text{ (m)}$$

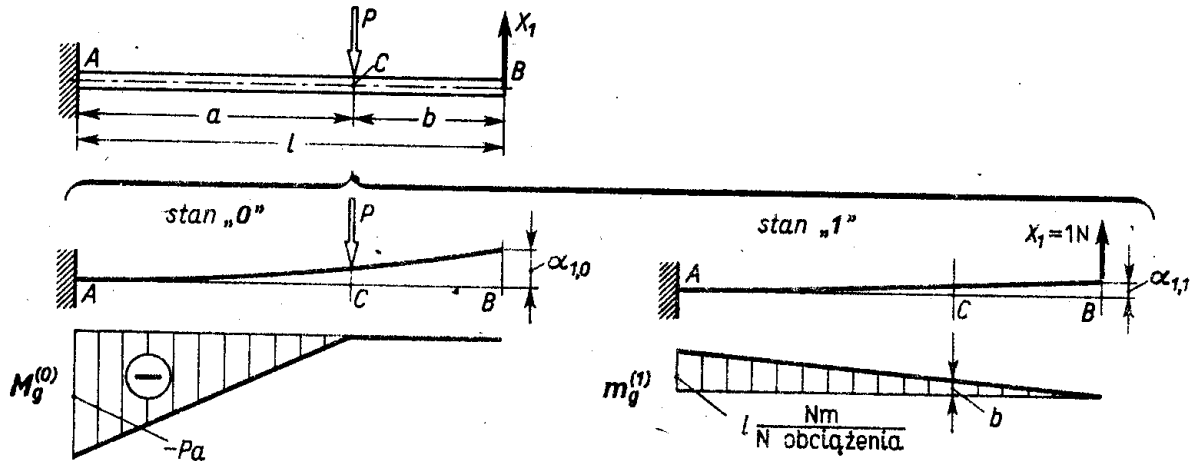
skąd wartość siły X_1

$$X_1 = \frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3}.$$

Moment gnący w przekroju A ma wartość

$$M_A = -Pa + X_1 l = -\frac{Pa(2l^2 - 3al + a^2)}{2l^2} = -\frac{Pab(l+b)}{2l^2}$$

identyczną jak podaje wzór (10.6). Niezależnie więc od przyjęcia ustroju podstawowego (statycznie wyznaczalnego) wynik końcowy (wypadkowy wysiłek przekroju) jest ten sam.



Rys. 10.19. Drugi wariant rozwiązania belki z rys. 10.13

5. Jak zmieni się tok rozwiązania belki (rys. 10.13), gdy sztywność $EJ_y \neq \text{const}$. Obliczyć moment X_1 , gdy $a = b = l/2$, a EJ'_y na odcinku BC jest połową EJ'_y na odcinku AC .

Odp. Równanie kanoniczne (a) to samo, a inne $\alpha_{1,1}$ i $\alpha_{1,0}$. Stosując we wzorach (b) i (c) skrócony sposób całkowania według wzoru (9.3) i tabl. 9.1 mamy

$$\alpha_{1,1} = \frac{a(l^2 + lb + b^2)}{3l^2 EJ'_y} + \frac{b^3}{3l^2 EJ'_y} = \frac{3l}{8EJ'_y}, \quad \alpha_{1,0} = \frac{Pl^2}{12EJ'_y}$$

oraz $X_1 = -2Pl/9 \approx -0,222Pl$. Wartość ta jest większa, niż obliczona z (10.6) $X_1 = -0,187Pl$ dla belki pryzmatycznej.

6. Jak zmieniają się ekstremalne naprężenia w pryzmatycznej belce (rys. 5.10), gdy końce jej utwierdzimy? Przyjąć, że odległość skrajnych włókien $z_1 = z_2$ (patrz rys. 5.30).

Odp: Stosując superpozycję mamy z wzorów (10.7)

$$X_1 = -\left(\sum P_i a_i b_i^2\right)/l^2 = -[4 \cdot 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 2 \cdot 2^2 + (-6) \cdot 3 \cdot 1^2]/4^2 = -2,62 \text{ kN m}$$

i podobnie $X_2 = 1,12 \text{ kN m}$. Z wykresu wypadkowego M_g wynika, że niebezpieczny jest przekrój A , w którym $M_A = X_1$. Redukcja $(M_g)_{\text{ekstr}}$ jest więc $2,62/3,0 = 0,87$ i w tym stosunku zmniejszą σ_{ekstr} .

7. Stosując zasadę superpozycji określić momenty w przekrojach A i B pryzmatycznych belek (rys. 10.20).

Odp. a. Stosując sposób jak na rys. 10.15b, mamy

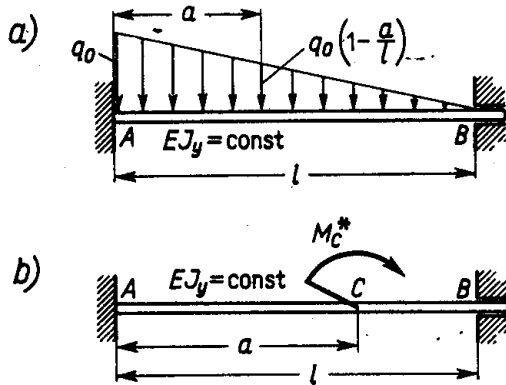
$$X_1 = -\int_0^l \frac{q_0 a(l-a)^3}{l^2} da = -\frac{q_0 l^2}{20}, \quad X_2 = -\int_0^l \frac{q_0(l-a)^2 a^2}{l^3} da = -\frac{q_0 l^2}{30}$$

b. Stosując chwyt jak na rys. 10.15c, otrzymujemy

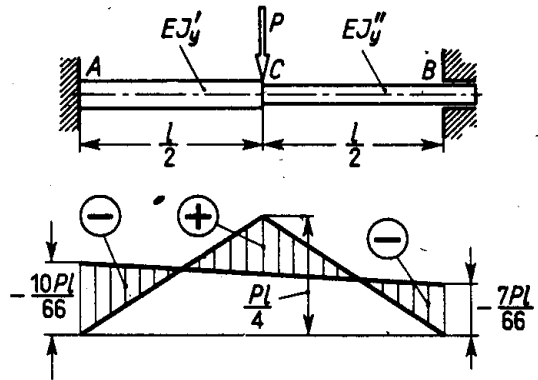
$$M_A = (X_1)_M = (dX_1/da) \Delta a = -M_C^* (l^2 - 4al + 3a^2)/l^2 = -M_C^* b(b-2a)/l^2, \\ M_B = (X_2)_M = (dX_2/da) \Delta a = -M_C^* (2al - 3a^2)/l^2 = -M_C^* a(2b-a)/l^2.$$

8. Do którego etapu rozwiązanie belki o różnej sztywności odcinków AC i CB (rys. 10.21) pokrywa się z podanym na rys. 10.17. Przeprowadzić obliczenia, gdy $EJ'_y = 2EJ''_y$.

Odp. Równania kanoniczne (i) te same; zmieniają się wielkości α (porównaj zadanie 5). $X_1 = -10Pl/66$, $X_2 = -7Pl/66$.



Rys. 10.20.



Rys. 10.21.

9. Ktoś, rozwiązując zadanie z rys. 10.20a, zastąpił obciążenie ciągłe siłą $P = q_0 l/2$ w odległości $a = l/3$ i te dane podstawił do wzorów (10.7). Czy takie postępowanie jest słuszne?

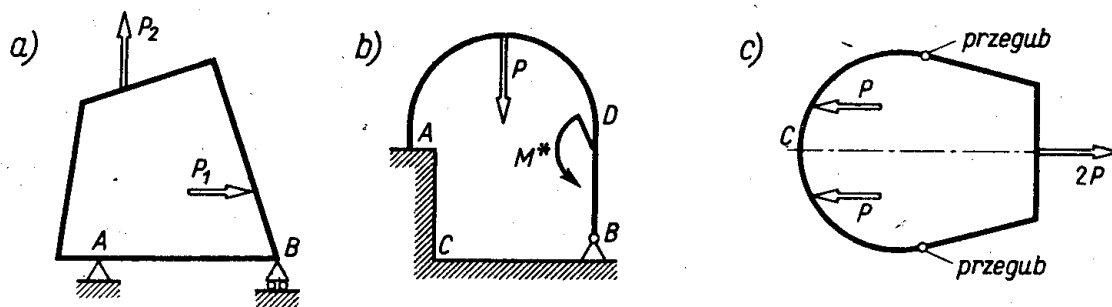
Odp. Jest błędne. Otrzymane tak wyniki $X_1 = -2q_0 l^2/27$ i $X_2 = -q_0 l^2/27$ różnią się znacznie od prawidłowych.

10. W pryzmatycznej belce (rys. 5.27), w której $a = l/8$, utwierdzono koniec A . Czy taka modyfikacja zwiększy, czy zmniejszy ekstremalne naprężenia w belce? Przyjąć $W'_y \cong W''_y$.

Odp. Zwiększy, gdyż moment $|X_1| = 21Pl/128 \approx 0,164Pl$ jest większy od $Pa = Pl/8$ w wersji pierwotnej. Tak więc wprowadzenie statycznej niewyznaczalności nie zawsze oznacza redukcję naprężeń ekstremalnych.

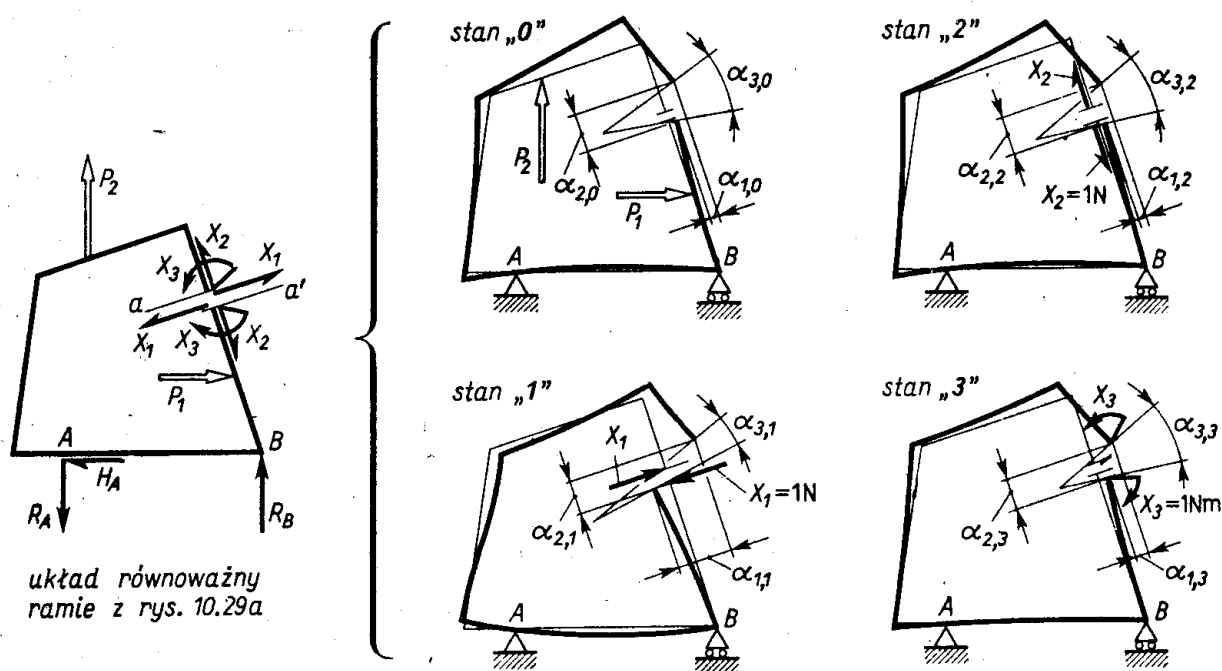
10.5. Statycznie niewyznaczalne ramy ściśle płaskie

Rozpatrzmy tu ramy tzw. jednoobwodowe, których pręty tworzą jeden płaski ciąg zamknięty w sobie, bądź zamknięty podłożem (rys. 10.29), przy czym główna oś bezwładności w każdym przekroju poprzecznym każdego pręta leży w płaszczyźnie ramy. Taką ramę nazywamy ściśle płaską. Zakładamy też, że rama jest płasko obciążona, czyli że siły zewnętrzne działają w płaszczyźnie ramy.



Rys. 10.29. Typy płaskich ram jednoobwodowych statycznie niewyznaczalnych
 a) bezprzegubowa; b) jednoprzegubowa, podłoże ABC zamyka obwód; c) dwuprzegubowa.

Jeśli badana rama jest *bezprzegubowa* (rys. 10.29a), to sprowadzenie jej do znanego już z art. 9.1 ustroju statycznie wyznaczalnego wymaga myślowego jej rozcięcia w jednym miejscu *a-a'*. W nowo powstałych przy tym przekrojach *a* i *a'* ujawniony zostaje ich wy-



Rys. 10.30. Rozwiązanie bezprzegubowej ramy ściśle płaskiej

siłek złożony z sił tnących X_1 , sił wzdłużnych X_2 i momentów gnących X_3 (rys. 10.30). Te składowe wysiłki przekrojów *a* i *a'* są na zasadzie działania i przeciwdziałania parami przeciwne, wobec czego nie można ich wyznaczyć z równań równowagi ramy jako całości.⁽¹⁾ Tak więc zadanie jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalne. Jego rozwiązanie jest powtórzeniem rozważań z art. 10.2. Po rozdzieleniu ustroju równowaznego na stany „0”, „1”, „2” i „3”, jak pokazuje rysunek, formułujemy równania kanoniczne (10.2), wyrażające ciągłość przesunięć w miejscu myślowego rozcięcia *a-a'*. Tak na przykład równanie

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,3} X_3 + \alpha_{1,0} = 0 \quad (a)$$

⁽¹⁾ Z równań tych wyznaczamy natomiast reakcje R_A , R_B i H_A .

oznacza brak względnego przesunięcia w kierunku działania sił X_1 . Podobnie pozostałe równania

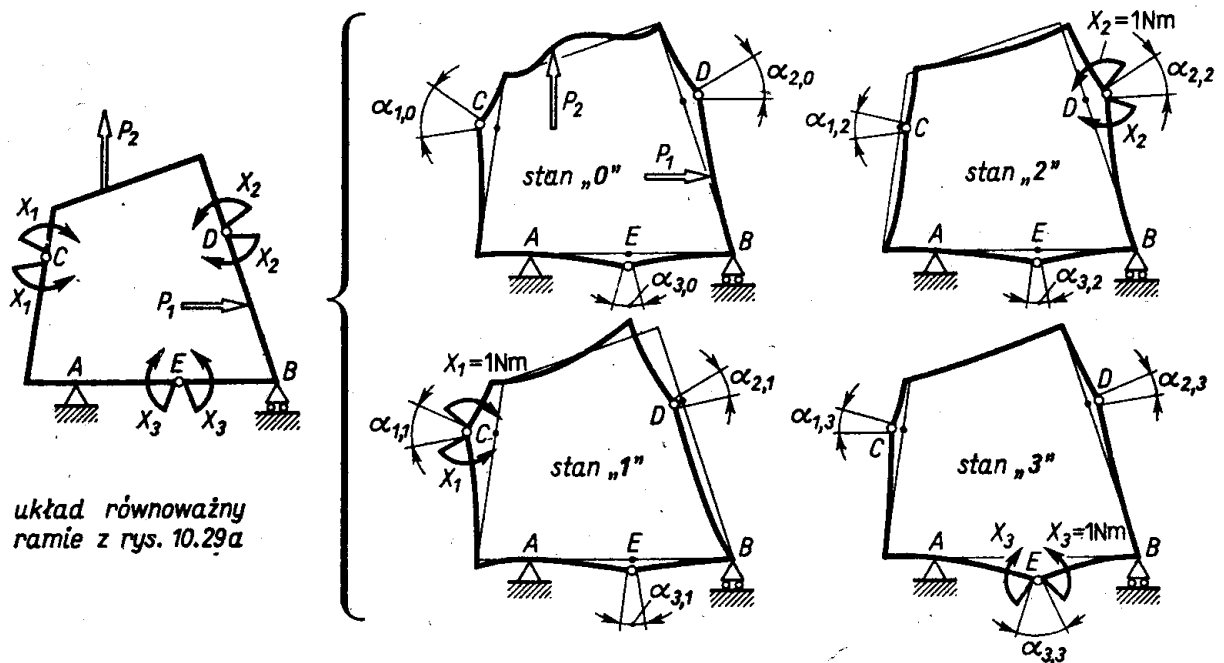
$$\left. \begin{aligned} \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,3} X_3 + \alpha_{2,0} &= 0, \\ \alpha_{3,1} X_1 + \alpha_{3,2} X_2 + \alpha_{3,3} X_3 + \alpha_{3,0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

wyrażają odpowiednio brak względnego przesunięcia w kierunku sił X_2 i względnego obrotu. Współczynniki $\alpha_{i,j}$ są nadal określone wzorami (10.3)÷(10.5), z tym że odpowiednie składniki dotyczą teraz prętów ramy. Po rozwiązaniu równań kanonicznych (a) i (b) obliczamy wypadkowy wysiłek w przekrojach prętów stosując zasadę superpozycji, otrzymując

$$M_g = M_g^{(0)} + \sum_1^3 m_g^{(i)} X_i, \quad N = N^{(0)} + \sum_1^3 n^{(i)} X_i, \quad T = T^{(0)} + \sum_1^3 t^{(i)} X_i, \quad (c)$$

gdzie oznaczenia są jak we wzorach (10.3) i (10.5).

Powyższy obiór ustroju równoważnego nie jest jedyny. Jeśli mianowicie zamiast rozcięcia $a-a'$ wprowadzimy w tejże ramie trzy myślowe przeguby C, D i E (rys. 10.31),



Rys. 10.31. Drugi wariant rozwiązania bezprzegubowej ramy płaskiej

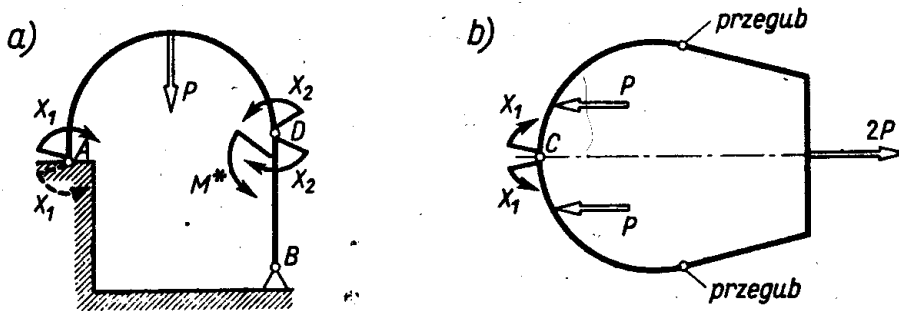
to otrzymujemy znany już z art. 9.1 ustrój statycznie wyznaczalny z nie znanymi na razie grupami momentów X przedstawiających oddziaływania prętów schodzących się w danym przegubie. Wartości X_1 , X_2 i X_3 obliczamy z tego samego co powyżej układu równań (a) i (b), mających jednak inny sens fizyczny. Tak na przykład $\alpha_{1,0}$ jest teraz kątem względnego obrotu (załomem) prętów w myślowym przegubie C i w stanie „0”. Podobnie $\alpha_{1,1} X_1$, $\alpha_{1,2} X_2$, $\alpha_{1,3} X_3$ są takimiż kątami odpowiadającymi wielokrotnościom stanów „1”, „2” i „3”. W wyniku superpozycji równanie (a) wyraża teraz brak względnego obrotu

(załomu) w myślowym przegubie C . Podobny sens w odniesieniu do myślowych przegubów D i E mają równania (b).

Jak wykazują przeliczenia, ten drugi sposób obioru układu równoważnego jest na ogół bardziej racjonalny niż pierwszy, gdyż korekta składników $M_g^{(0)}$, $N^{(0)}$ i $T^{(0)}$ stanu „0” we wzorze (c) przez człony $m_g^{(i)} X_i, \dots$ jest z reguły mniejsza przy sposobie drugim niż przy pierwszym. Ponadto sposób II ma tę zaletę, że wszystkie $\alpha_{i,j}$ oraz $\alpha_{i,0}$ są wymiarowo odpowiednio jednorodne. Z drugiej strony sposób I jest pojęciowo prostszy i prostsze jest na ogół obliczenie wyrazów α . Z tych powodów stosowanie sposobu II zaleca się dopiero po nabyciu pewnej wprawy w rozwiązywaniu takich zadań.

Podobnie rozwiązujemy ramy jedno- i dwuprzegubowe (rys. 10.29). Jeśli stosujemy przy tym drugi sposób obioru układu równoważnego, to liczba myślowych przegubów, a więc i grup momentów X jest odpowiednio mniejsza. I tak dla ramy jednoprzegubowej (rys. 10.29b) wprowadzamy przeguby A i D (rys. 10.32a), a nie znane X_1 i X_2 określamy z równań

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,0} &= 0, \\ \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (d)$$



Rys. 10.32. Obiór układu równoważnego dla ram jedno- i dwuprzegubowych

warunkujących brak załomu w tych myślowych przegubach. Jest przy tym rzeczą jasną, że odpada tu trzecie równanie dla rzeczywiście istniejącego przegubu B , w którym taki względny obrót pręta jest dozwolony.

Podobnie dla ramy dwuprzegubowej (rys. 10.29c) zależność

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0$$

warunkuje brak załomu w jedynym myślowym przegubie C (rys. 10.32b), podczas gdy w istniejących przegubach załomy takie są dozwolone.

Bardzo często ramy płaskie mają jedną lub więcej osi symetrii. W takich przypadkach rozwiązanie upraszcza się przez wykorzystanie zasady jednoznaczności omówionej w art. 10.2 (patrz rys. 10.10 – 10.12).

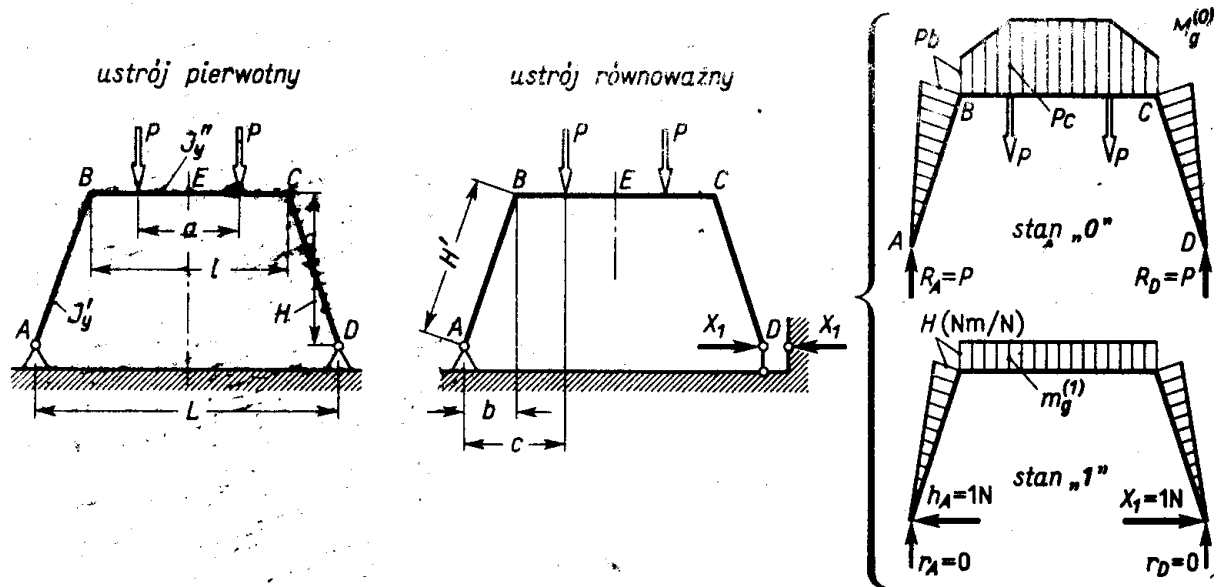
Zadania

1. Obliczyć przebieg wysiłku przekrojów w ramie (rys. 10.33). Dane: $L = 3$ m, $l = 2$ m, $a = 1$ m, $H = 1,5$ m, $J'_y = J''_y$, $P = 10$ kN.

Rozwiązanie. Ponieważ rama ma dwa przeguby, jest ona jednokrotnie statycznie niewyznaczalna. Jako niewiadomą X_1 bierzemy poziomą składową reakcji podpory D . Równanie kanoniczne

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0$$

oznacza brak poziomego przesunięcia punktu D względem podłoża. Po rozdzieleniu obciążenia ustroju równoważnego na stan „0” i „1”, określeniu $M_g^{(0)}$ i $m_g^{(1)}$ wyznaczamy $\alpha_{1,1}$ i $\alpha_{1,0}$



Rys. 10.33. Rozwiązanie ramy jednokrotnie statycznie niewyznaczalnej

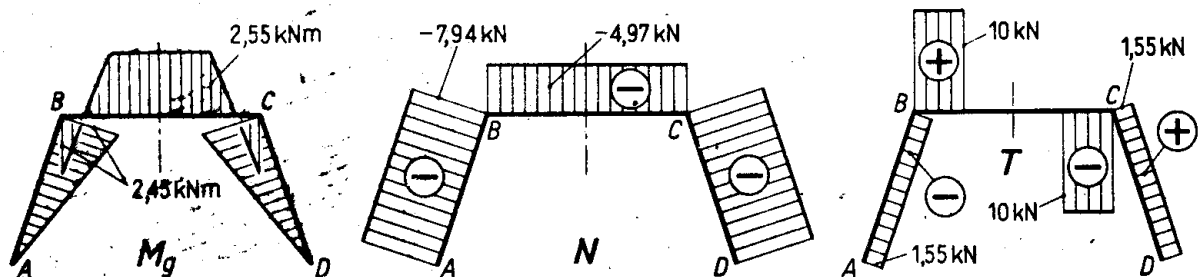
$$\alpha_{1,1} = \int \frac{[m_g^{(1)}]^2 ds}{EJ_y} = 2 \underbrace{\frac{HH'}{2} \frac{2H}{3EJ_y'}}_{\text{pręty AB i CD}} + \underbrace{\frac{Hl \cdot H}{EJ_y''}}_{\text{pręt BC}} \left(\frac{\text{m}}{\text{N}} \right);$$

$$\alpha_{1,0} = \int \frac{M_g^{(0)} m_g^{(1)} ds}{EJ_y} = 2 \underbrace{\frac{PbH'}{2} \frac{2H}{3EJ_y'}}_{\text{pręty AB i CD}} + \underbrace{\left[Pca + \frac{P(b+c)(l-a)}{2} \right] \frac{H}{EJ_y''}}_{\text{pręt BC}},$$

przy czym wykorzystano regułę (9.3) uproszczonego całkowania i wprowadzono oznaczenia b, c, H' widoczne z rysunku. Rozwiązanie równania kanonicznego, daje

$$X_1 = - \frac{Pl}{4H} \frac{[(2L/l) - 1 - (a/l)^2] + (8bH'/3l^2)(J_y''/J_y')}{1 + (2H'/3l)(J_y''/J_y')} \quad (\text{N}).$$

Ponieważ $X_1 < 0$, rzeczywiste zwroty sił X_1 są przeciwne niż na rysunku. Zgadza się to z fizycznym odczuciem, gdyż w stanie „0” siły P zwiększają długość AD , wobec czego podpora D musi wyrzucić



Rys. 10.34. Wynik rozwiązania ramy z rys. 10.33

nacisk w kierunku od D do A . Z danych liczbowych określamy $X_1 = -0,497P = 4,97$ kN, a następnie superponujemy wykresy stanów „0” i „1” (rys. 10.34). Tak na przykład momenty gnące w narożu B i punkcie E są

$$(M_g)_B = Pb + X_1H = 10 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m} - 4,97 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} = -2,45 \text{ kNm},$$

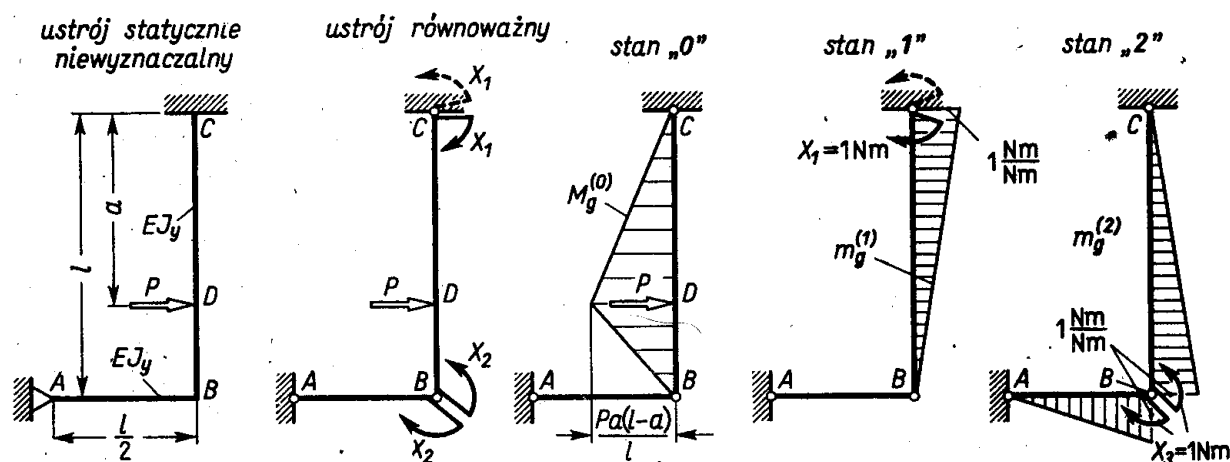
$$(M_g)_E = Pc + X_1H = 10 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} - 4,97 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} = 2,55 \text{ kNm}.$$

Gdyby podpora D była przesuwna (ustrój statycznie wyznaczalny), wówczas w tych miejscach momenty gnące byłyby 5 kN m i 10 kN m. Widać więc dużą korzyść, jaką daje tu statyczna niewyznaczalność.

2. Dla ramy (rys. 10.33) zbadać przypadek, gdy siły P działają w narożach B i C . Jaki sens fizyczny ma wynik?

Odp. $a = l$, $X_1 = -Pb/H$ niezależnie od wartości (J'_y/J'_z) . Wypadkowy $M_g = 0$. Rama działa tu jak kratownica.

3. Określić momenty gnące w narożu B i przekroju C ramy (rys. 10.35). Wyznaczyć przebieg wypadkowego M_g .



Rys. 10.35. Przykład rozwiązania ramy jednoprzegubowej

Rozwiązanie. Po wprowadzeniu myślowych przegubów B i C mamy ustrój równoważny jak na rys. 10.32a z niewiadomymi grupami momentów X_1 i X_2 określonych układem równań (d). Dla obliczenia współczynników α rysujemy wykresy $M_g^{(0)}$, $m_g^{(1)}$ i $m_g^{(2)}$, jak podaje rysunek. Widać, że w stanie „0” i „1” na zginanie pracuje tylko pręt BC jak belka na dwóch podporach obciążona bądź siłą P , bądź momentem $X_1 = 1$ Nm. W stanie „2” na zginanie pracują obydwie przęty AB i BC . Stosując regułę całkowania (9.3) mamy:

$$\alpha_{1,1} = \frac{l}{3EJ_y} \left(\frac{\text{rad}}{\text{Nm}} \right), \quad \alpha_{1,2} = \frac{l}{6EJ_y} \left(\frac{\text{rad}}{\text{Nm}} \right), \quad \alpha_{2,2} = \frac{l}{2EJ_y} \left(\frac{\text{rad}}{\text{Nm}} \right),$$

a wyrazy wolne $\alpha_{1,0}$ i $\alpha_{2,0}$ przy wykorzystaniu tabl. 9.1

$$\alpha_{1,0} = -\frac{Pa(l-a)(2l-a)}{6lEJ_y} \text{ (rad)}, \quad \alpha_{2,0} = -\frac{Pa(l-a)(l+a)}{6lEJ_y} \text{ (rad)}.$$

Po podstawieniu tych danych do równań (d) otrzymujemy

$$X_1 = \frac{Pa(l-a)(5l-4a)}{5l^2} \text{ (Nm)}, \quad X_2 = \frac{3Pa^2(l-a)}{5l^2} \text{ (Nm)}.$$

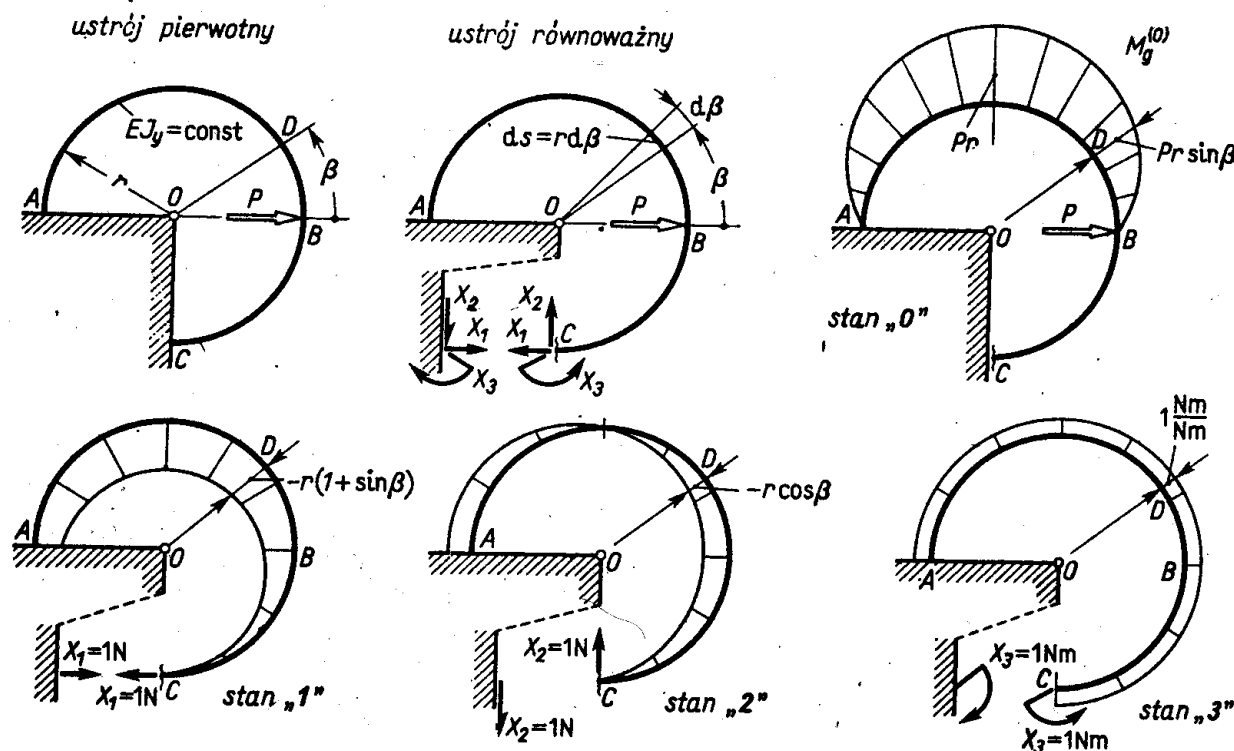
Ponieważ $X_1 > 0$ i $X_2 > 0$, zatem ich zwroty są jak na rysunku, przy czym X_1 jest momentem gnącym w przekroju C , a X_2 w narożu B . Wypadkowy wykres M_g otrzymamy superponując wykres $M_g^{(0)}$ i zwię-

kszone odpowiednio X_1 i X_2 razy wykresy $m_g^{(1)}$, $m_g^{(2)}$. Zależnie od wartości a niebezpieczny może być przekrój B, C lub D.

4. Wykorzystując wyniki zadania 3 obliczyć X_1 i X_2 , gdy obciążenie ramy (rys. 10.35) stanowią dwie siły P w odległościach $a_1 = l/3$ i $a_2 = 2l/3$.

Od p. Stosując superpozycję mamy $X_1 = 4Pl/15$, $X_2 = 2Pl/15$.

5. Wyznaczyć przebieg wysiłku przekroju w pierścieniu (rys. 10.36) o małej krzywiznie i stałej sztywności.



Rys. 10.36. Przykład rozwiązania ramy bezprzegubowej

Rozwiązanie. Po myślowym rozcięciu utwierdzenia w punkcie C i wprowadzeniu niewiadomych X_1 , X_2 i X_3 zadanie sprowadza się do rozwiązania układu równań kanonicznych (a) i (b). Przyjmując kąt β ($-\pi/2; \pi$) jako zmienną niezależną, określamy moment gnący w stanie „0”,

$$M_g^{(0)} \equiv 0, \quad \text{gdy } -(\pi/2) < \beta < 0, \quad M_g^{(0)} = Pr \sin \beta, \quad \text{gdy } 0 < \beta < \pi,$$

oraz w całym zakresie β ($-\pi/2; \pi$) dla stanów „1”, „2” i „3”

$$m_g^{(1)} = -r(1 + \sin \beta) \text{ (Nm/N)}, \quad m_g^{(2)} = -r \cos \beta \text{ (Nm/N)}, \quad m_g^{(3)} = 1 \text{ (Nm/Nm)},$$

przy czym dodatni moment odpowiada ścisnaniu włókien zewnętrznych. Współczynniki α obliczamy z wzorów (10.3) i (10.4), gdyż pierścień jest słabo zakrzywiony.

$$\alpha_{1,1} = \int \frac{[m_g^{(1)}]^2 ds}{EJ_y} = \int_{-\pi/2}^{\pi} \frac{r^2(1 + \sin \beta)^2 r d\beta}{EJ_y} = \left(\frac{9\pi}{4} + 2\right) \frac{r^3}{EJ_y} \left(\frac{\text{m}}{\text{N}}\right),$$

$$\alpha_{2,2} = \int_{-\pi/2}^{\pi} \frac{r^2 \cos^2 \beta r d\beta}{EJ_y} = \frac{3\pi r^3}{4EJ_y} \left(\frac{\text{m}}{\text{N}}\right), \quad \alpha_{3,3} = \int_{-\pi/2}^{\pi} \frac{1^2 r d\beta}{EJ_y} = \frac{3\pi r}{2EJ_y} \left(\frac{\text{rad}}{\text{Nm}}\right),$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,1} = \frac{r^3}{2EJ_y}, \quad \alpha_{1,3} = \alpha_{3,1} = -\frac{(3\pi + 2)r^2}{2EJ_y}, \quad \alpha_{2,3} = \alpha_{3,2} = -\frac{r^2}{EJ_y}.$$

Przy obliczeniu $\alpha_{1,0} \div \alpha_{3,0}$ z wzoru (10.5) uwzględniamy, że w przedziale $\beta (0; -\pi/2)$ jest $M_g^{(0)} = 0$, wobec czego

$$\alpha_{1,0} = \int \frac{M_g^{(0)} m_g^{(1)} ds}{EJ_y} = \int_0^\pi \frac{Pr \sin \beta [-r(1 + \sin \beta)] r d\beta}{EJ_y} = -\frac{(4+\pi) Pr^3}{EJ_y}$$

i podobnie $\alpha_{2,0} = 0$, $\alpha_{3,0} = 2Pr^2/EJ_y$. W rezultacie równania kanoniczne po skróceniu są

$$\begin{aligned} [(9\pi+8)/4] X_1 r + (1/2) X_2 r - [(3\pi+2)/2] X_3 - [(4+\pi)/2] Pr &= 0, \\ (1/2) X_1 r + (3\pi/4) X_2 r - X_3 + 0 &= 0, \\ -[(3\pi+2)/2] X_1 r - X_2 r + (3\pi/2) X_3 + 2Pr &= 0, \end{aligned}$$

skąd po rozwiązaniu mamy

$$X_1 \approx 0,528P, \quad X_2 \approx -0,023P, \quad X_3 \approx 0,210Pr.$$

Wypadkowe momenty gnące otrzymujemy z wzoru (c)

$$M_g = M_g^{(0)} + m_g^{(1)} X_1 + m_g^{(2)} X_2 + m_g^{(3)} X_3,$$

w którym wstawiamy znalezione X_i oraz dane z rys. 10.36

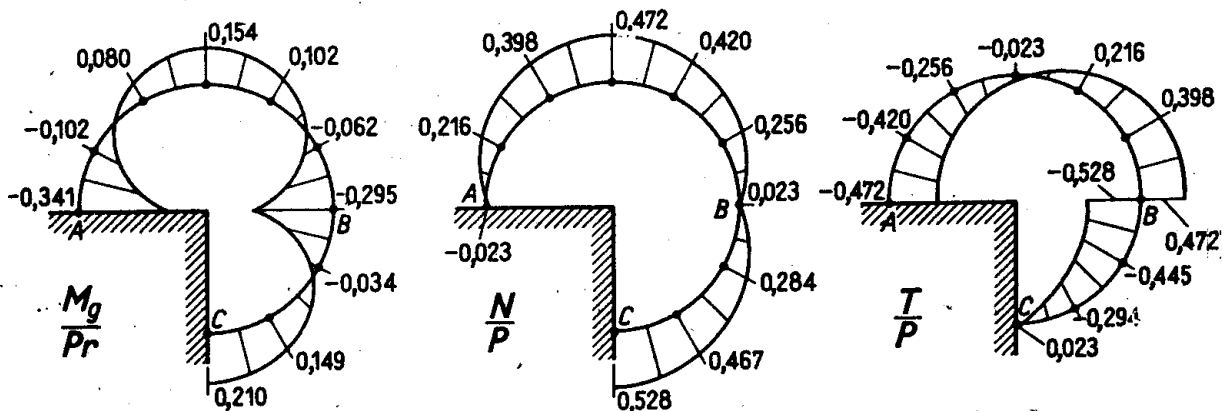
$$\begin{aligned} M_g &\approx (-0,318 - 0,528 \sin \beta + 0,023 \cos \beta) Pr, & \text{gdy } \beta (-\pi/2; 0), \\ M_g &\approx (-0,318 + 0,472 \sin \beta + 0,023 \cos \beta) Pr, & \text{gdy } \beta (0; \pi). \end{aligned}$$

Podobnie obliczamy siłę wzdłużną N i tnącą T

$$\begin{aligned} N &= -X_1 \sin \beta - X_2 \cos \beta = (-0,528 \sin \beta + 0,023 \cos \beta) P, & \text{gdy } \beta (-\pi/2; 0), \\ N &= -X_1 \sin \beta - X_2 \cos \beta + P \sin \beta = (0,472 \sin \beta + 0,023 \cos \beta) P, & \text{gdy } \beta (0; \pi), \\ T &= -X_1 \cos \beta + X_2 \sin \beta = (-0,528 \cos \beta - 0,023 \sin \beta) P, & \text{gdy } \beta (-\pi/2; 0), \\ T &= -X_1 \cos \beta + X_2 \sin \beta + P \cos \beta = (0,472 \cos \beta - 0,023 \sin \beta) P, & \text{gdy } \beta (0; \pi). \end{aligned}$$

Obliczone stąd wykresy M_g , N i T podaje rys. 10.37.

6. Sprawdzić, czy pominięte w zadaniu 5 miana oraz fizyczny sens wielkości $\alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{3,2}$ oraz $\alpha_{1,0}$ są prawidłowe.

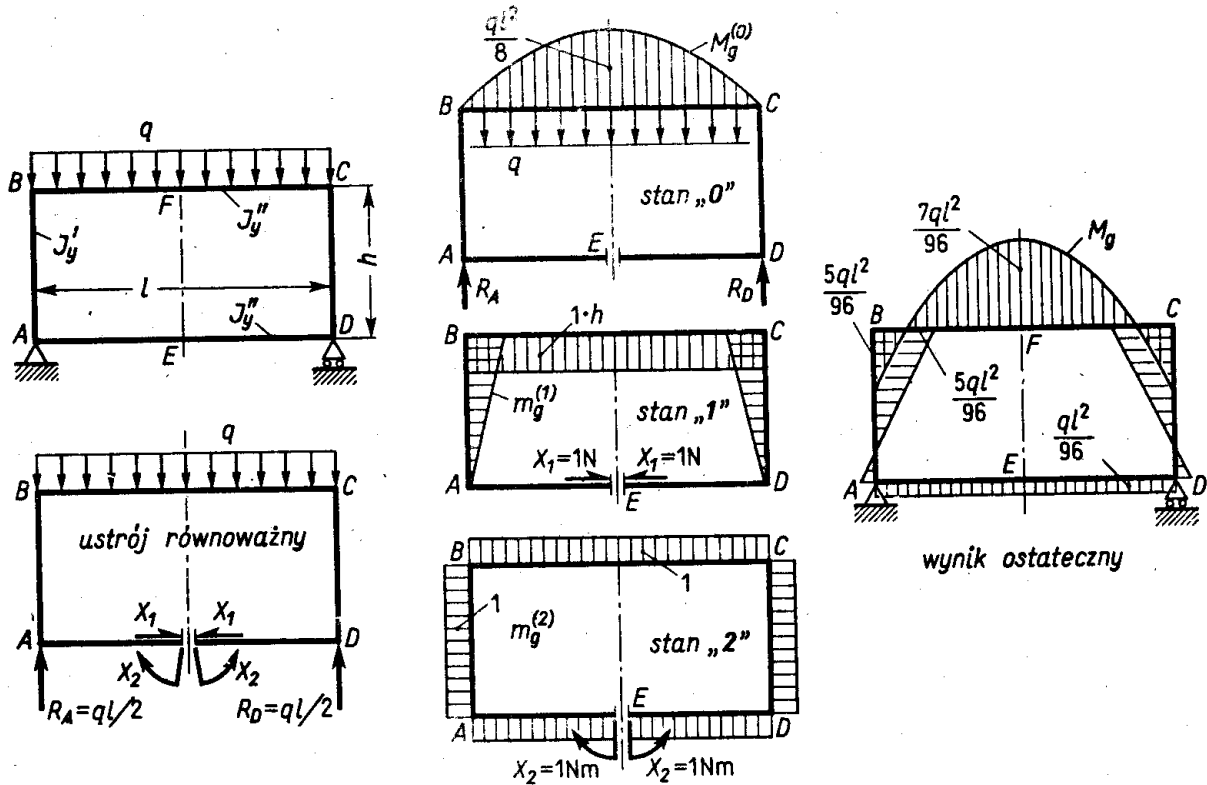


Rys. 10.37. Wynik rozwiązania ramy z rys. 10.36
Dane liczbowe określone są dla kąta $\beta = -90^\circ, -60^\circ, \dots, 180^\circ$.

Odp. $\alpha_{1,0}$ (m), $\alpha_{2,0}$ (m), $\alpha_{3,0}$ (rad) oznaczają odpowiednio przesunięcie poziome i pionowe oraz obrót przekroju C względem podłoża. Wielkości $\alpha_{1,2}$ (m/N) = $\alpha_{2,1}$ (m/N) – przesunięcia w metrach na niuton odpowiedniego obciążenia. Wielkości $\alpha_{1,3}$ (m/N m) i $\alpha_{2,3}$ (m/N m) – przesunięcia poziome i pionowe przekroju C wywołane przez $X_3 = 1$ N m. Wreszcie $\alpha_{3,1}$ (1/N) i $\alpha_{3,2}$ (1/N) – kąty obrotu przekroju C wywołane przez $X_1 = 1$ N lub $X_2 = 1$ N. *Pozorna zgodność mian $\alpha_{1,3}$ i $\alpha_{3,1}$ oraz*

$\alpha_{2,3}$ i $\alpha_{3,2}$ nie oznacza ich tożsamości fizycznej, podobnie jak ze zgodności mian momentu siły (N m) i pracy (N m) nie wynika fizyczna tożsamość tych wielkości.

7. Znaleźć wykres momentu gnącego w symetrycznej ramie symetrycznie obciążonej (rys. 10.38). Przyjąć $2J'_y = J''_y$, $h = l/2$.



Rys. 10.38. Rozwiązanie symetrycznej ramy symetrycznie obciążonej

Rozwiązanie. Z zasady jednoznaczności (art. 10.2) wynika, że w myślowym przecięciu E na osi symetrii istnieje tylko siła wzdłużna X_1 i moment gnący X_2 , określone z równań

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,0} = 0,$$

$$\alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,0} = 0.$$

Z uwagi na symetrię wykresów $M_g^{(0)}$, $m_g^{(1)}$ i $m_g^{(2)}$ obliczamy wielkości α tylko dla połówki ustroju. W wyniku mamy

$$\alpha_{1,1} = \frac{h \cdot h}{2} \frac{2h}{3} \frac{1}{EJ'_y} + \frac{hl}{2} h \frac{1}{EJ''_y} = \frac{h^2 l}{2EJ''_y} \left(1 + \frac{2h}{3l} \frac{J''_y}{J'_y} \right) \left(\frac{\text{m}}{\text{N}} \right),$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{h \cdot h}{2} (-1) \frac{1}{EJ'_y} + \frac{hl}{2} (-1) \frac{1}{EJ''_y} = -\frac{hl}{2EJ''_y} \left(1 + \frac{h}{l} \frac{J''_y}{J'_y} \right) \left(\frac{\text{m}}{\text{Nm}} \right)$$

i podobnie

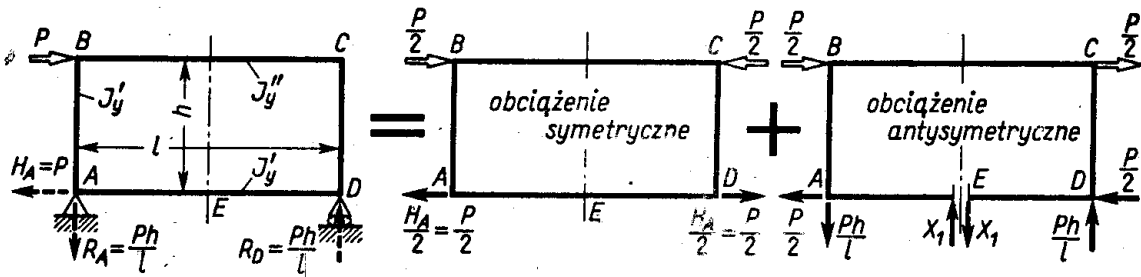
$$\alpha_{2,2} = \frac{l}{EJ''_y} \left(1 + \frac{h}{l} \frac{J''_y}{J'_y} \right), \quad \alpha_{1,0} = -\frac{ql^3 h}{24EJ''_y}, \quad \alpha_{2,0} = \frac{ql^3}{24EJ''_y}.$$

Rozwiązanie równań kanonicznych daje

$$X_1 = \frac{ql^2}{12h} \frac{1}{1+\zeta}, \quad X_2 = \frac{ql^2}{12} \frac{\zeta}{(1+\zeta)(1+3\zeta)},$$

gdzie $\zeta = (h/3l)(J_y''/J_y')$ – bezwymiarowy parametr. Dla wartości $2J_y' = J_y''$ i $h = l/2$ mamy: $X_1 = ql^2/16h$, $X_2 = ql^2/96$. Superponując teraz wykresy $M_g^{(0)}$ i $m_g^{(1)} X_1$ oraz $m_g^{(2)} X_2$ widzimy, że niebezpieczny jest przekrój w środku pręta BC , gdzie $(M_g)_{ekstr} = 7ql^3/96$. Wartość ta stanowi $7/12 \approx 0,58$ ekstremalnej wartości $M_g^{(0)}$ w ramie statycznie wyznaczalnej.

8. Pomijając wpływ sił N i T na odkształcenia określić przebieg M_g w ramie obciążonej poziomą siłą P (rys. 10.39).



Rys. 10.39. Podział obciążenia symetrycznej ramy

Rozwiązanie. Aby uprościć tok obliczeń, rozkładamy naprzód obciążenie na część symetryczną i antysymetryczną. Obciążenie symetryczne przy pominięciu odkształceń od sił wzdłużnych wywołuje tylko rozciąganie pręta AD siłą $N = P/2$ i także ściskanie pręta BC . Przy antysymetrii obciążenia w przekroju E istnieją według zasady jednoznaczności tylko siły tnące X_1 . Ich wartości wyznaczamy z równania

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0$$

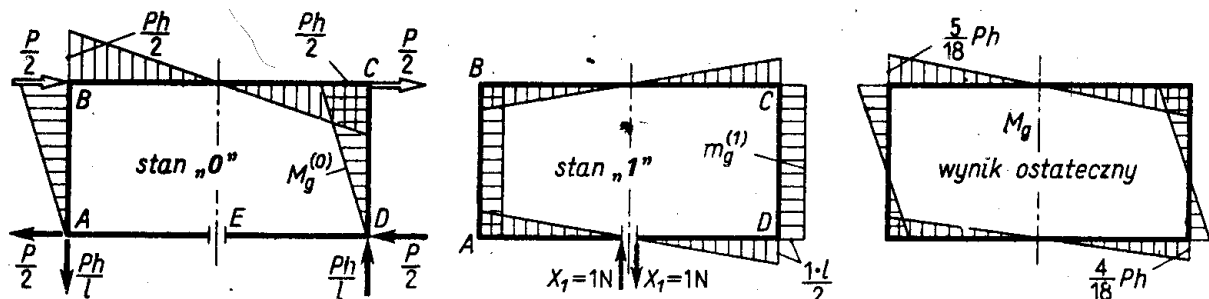
w którym obliczone z wykresów (rys. 10.40) wielkości

$$\alpha_{1,1} = \frac{l^3}{24EJ_y''} \left(1 + \frac{J_y''}{J_y'} + \frac{6h}{l} \frac{J_y''}{J_y'} \right), \quad \alpha_{1,0} = -\frac{Phl^2}{24EJ_y''} \left(1 + \frac{3h}{l} \frac{J_y''}{J_y'} \right)$$

Ostatecznie, przy oznaczeniu $\zeta_1 = (h/l)(J_y''/J_y')$, mamy

$$X_1 = \frac{Ph}{l} \frac{1 + 3\zeta_1}{1 + 5\zeta_1 + (J_y''/J_y')}$$

Biorąc, $J_y'' = 2J_y'$ i $h/l = 0,5$ otrzymujemy $X_1 = 4Ph/9l$, a przebieg M_g jak na rys. 10.40.

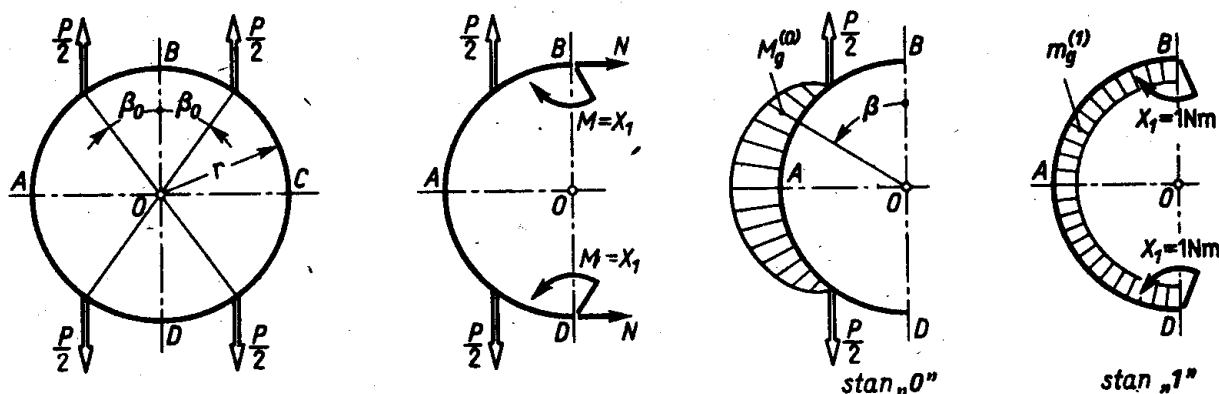


Rys. 10.40. Rozwiązanie ramy z rys. 10.39 obciążonej antysymetrycznie

Podane rozwiązanie ilustruje dobitnie uproszczenie, jakie daje zastosowanie zasady jednoznaczności. Zamiast bowiem układu trzech równań kanonicznych, odpowiadających przecięciu ramy w dowolnym miejscu, np. w narożu C , mamy tu tylko jedno równanie, gdyż pozostałe niewiadome (siła wzdłużna i moment przekroju E) są równe zero.

9. Wyznaczyć przebieg M , w pierścieniu o małej krzywiznie i stałej sztywności (rys. 10.41). Zbadać przypadek $\beta_0 = 0$.

Rozwiązanie. Fakt, że i ustrój, i obciążenie mają podwójną symetrię (osie AC i BD), wykorzystamy prowadząc *podwójne* przecięcie wzdłuż jednej z osi, np. BD . Z racji symetrii pionowej w prze-



Rys. 10.41. Rozwiązanie ramy z podwójną symetrią obciążenia

krojach B i D istnieją tylko siły wzdłużne i momenty gnące (zasada jednoznaczności). Z racji symetrii poziomej są one odpowiednio równe. Z warunku równowagi rzutów na oś AO dla lewej połówki pierścienia mamy $N = 0$. Nieznany moment $M = X_1$ określamy z równania

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0.$$

Wielkości α obliczamy jak dla prętów prostych (mała krzywizna), pomijając przy tym wpływ sił wzdłużnych i tnących. Ponieważ $m_g^{(1)} = -1 \text{ N m/N m} = \text{const}$, a $M_g^{(0)} = 0$ dla $\beta(0, \beta_0)$ oraz $M_g^{(0)} = Pr(\sin \beta - \sin \beta_0)/2$ dla $\beta(\beta_0; \pi/2)$, zatem

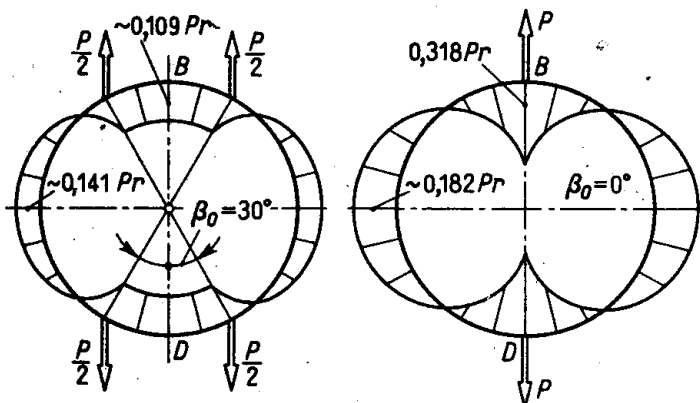
$$\alpha_{1,1} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^2 r d\beta}{EJ} = \frac{2\pi r}{EJ}, \quad \alpha_{1,0} = 4 \int_{\beta_0}^{\pi/2} \frac{Pr(\sin \beta - \sin \beta_0)(-1) r d\beta}{2EJ} =$$

$$= -\frac{2Pr^2}{EJ} \left[\cos \beta_0 - \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \sin \beta_0 \right]$$

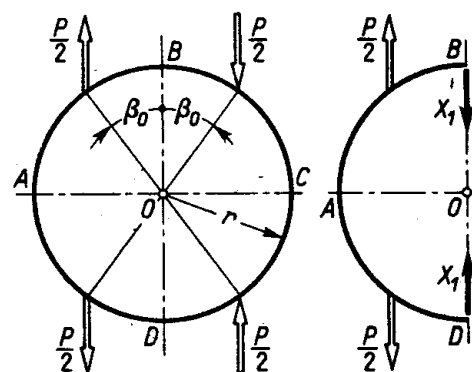
i w rezultacie

$$X_1 = \frac{Pr}{\pi} \left[\cos \beta_0 - \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \sin \beta_0 \right] (\text{Nm}).$$

Gdy $\beta_0 = 0$, wówczas pierścień obciążają siły P przyłożone w punktach B i D , a wtedy $X_1 = Pr/\pi \approx 0,318Pr$. Przebieg momentu gnącego, gdy $\beta_0 = 30^\circ$ i $\beta = 0^\circ$, podaje rys. 10.42.



Rys. 10.42. Wykresy M_g dla pierścienia z rys. 10.41



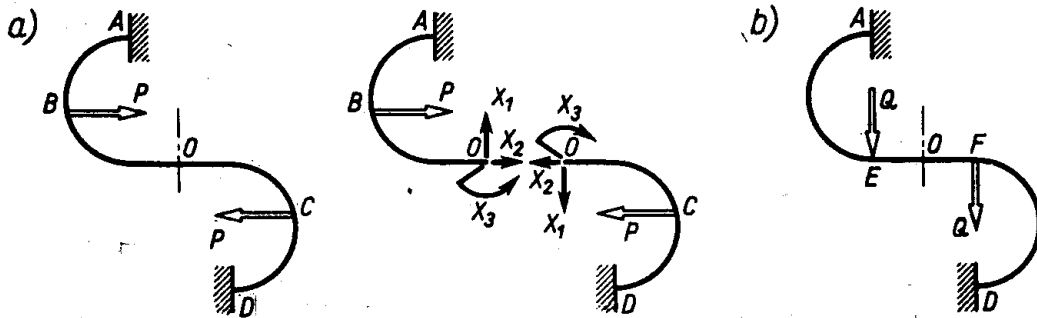
Rys. 10.43. Do zadania 10

10. Rozwiązać zadanie 9 przy obciążeniu jak na rys. 10.43.

Odp. W przekrojach B i D działają tylko siły tnące X_1 symetryczne względem AC . Wartość $X_1 = (P/2) [1 - (2\beta_0/\pi) - (\sin 2\beta_0/\pi)]$.

11. Stosując zasadę jednoznaczności, orzec, jakie składowe wysiłku istnieją w przekroju O ustroju punktowo symetrycznego przy obciążeniu punktowo symetrycznym (rys. 10.44a).

Rozwiązanie. Po myślowym rozcięciu z ujawnieniem wszystkich możliwych składowych wysiłku, tj. X_1, X_2, X_3 , obróćmy część OCD do nakrycia się z OBA . Otrzymujemy te same części, tak samo obciążone, a więc dla każdej części wysiłki przekroju O musi być ten sam. Warunek ten spełniają X_1 i X_2 i tylko one mogą istnieć. Zadanie jest więc dwukrotnie statycznie niewyznaczalne.



Rys. 10.44. Analiza ustroju punktowosymetrycznego

12. Powtórzyć zadanie 11 przy punktowo antysymetrycznym obciążeniu ustroju (rys. 10.44b).

Odp. Tylko $X_3 \neq 0$ i ustrój jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.

13. Podać najprostszy sposób rozwiązania ustroju (rys. 10.45) o wielokrotnej symetrii budowy i obciążenia.

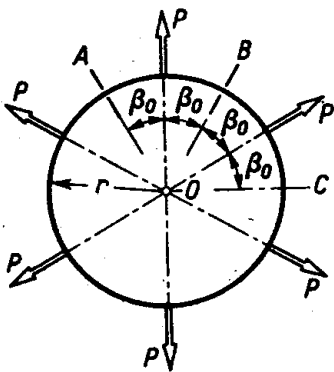
Rozwiązanie. Rozdzielmy ustrój na powtarzające się jednakowe części AB, BC, \dots . Każda z nich jest symetryczna i symetrycznie obciążona, wobec czego w równoprawnych przekrojach A, B, C, \dots istnieją tylko siła wzdłużna N i moment M . Z równowagi jednego z takich elementów, np. AB , wynika, że $N = P/2 \sin \beta_0$ i jedyną niewiadomą jest moment $M = X_1$. Jego wartość określamy z równania kanonicznego

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0,$$

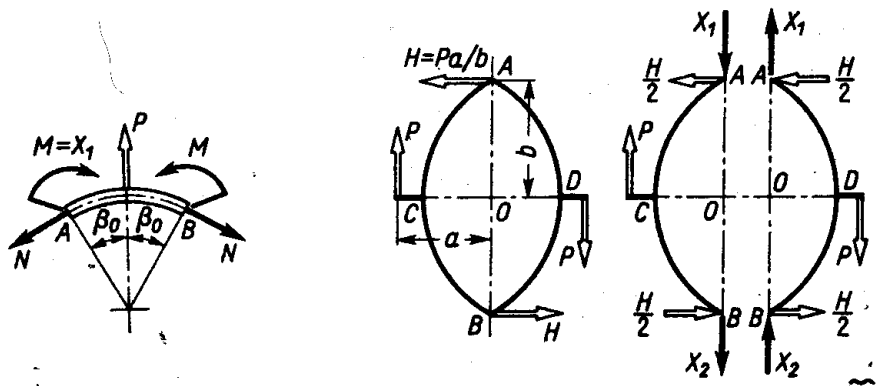
w którym $\alpha_{1,1} = 2\beta_0 r/EJ$, $\alpha_{1,0} = -Pr^2 (\beta_0 - \sin \beta_0)/EJ, \sin \beta_0$, i w rezultacie

$$X_1 = \frac{Pr}{2} \left(\frac{1}{\sin \beta_0} - \frac{1}{\beta_0} \right).$$

14. Bez użycia równań kanonicznych rozwiązać ramę (rys. 10.46).



Rys. 10.45. Wielokrotna symetria ustroju i obciążenia



Rys. 10.46. Dwukrotna symetria ustroju i antysymetria obciążenia

Rozwiązanie. Każdą z sił H dzielimy na połówki, między którymi prowadzimy myślowe przecięcie AOB , otrzymując dwie identyczne części ACB i ADB przeciwnie obciążone. Z racji symetrii ustroju i antysymetrii obciążenia w przekrojach A i B są tylko siły X_1 i X_2 , nie ma zaś sił równoległych do COD i momentów gnących. Po obrocie (w płaszczyźnie rysunku) części ADB do nakrycia się z ACB mamy identyczność obciążenia, skąd $X_1 = X_2$, a z warunku równowagi każdej z części $X_1 = X_2 = P/2$.

15. Sformułować wzory dla współczynników $\alpha_{i,j}$ i wyrazów $\alpha_{i,0}$ równań kanonicznych, gdy pręty ustroju są silnie zakrzywione.

Rozwiązanie. Wykorzystując wzór (9.10) i rys. 9.32 mamy

$$\alpha_{i,j} = \int \frac{m_a^{(i)} m_a^{(j)} ds}{EJ_y} + \int \frac{(m_a^{(i)} n^{(j)} + m_a^{(j)} n^{(i)}) e ds}{EJ_y} + \int \frac{n^{(i)} n^{(j)} ds}{EA} + \psi \int \frac{t^{(i)} t^{(j)} ds}{GA}, \quad (10.9)$$

$$\alpha_{i,0} = \int \frac{M_a^{(0)} m_a^{(i)} ds}{EJ_y} + \int \frac{(M_a^{(0)} n^{(i)} + N^{(0)} m_a^{(i)}) e ds}{EJ_y} + \int \frac{N^{(0)} n^{(i)} ds}{EA} + \psi \int \frac{T^{(0)} t^{(i)} ds}{GA}, \quad (10.10)$$

gdzie $m_a^{(i)}, \dots, m_a^{(j)}, \dots, M_a^{(0)}, \dots$ składowe wysiłku przekroju odpowiednio w stanie „i”, gdy $X_1 = 1$, w stanie „j”, gdy $X_j = 1$, i w stanie „0”. Ponadto ds – długość elementu osi pręta, a $e \approx J_y/Ar$ – odległość między warstwą obojętną a osią pręta (wzór 6.22).